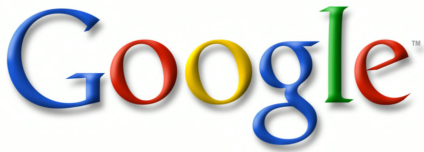



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633362 0





AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

Dr. ARWED FUHRMANN,

ASSISTENT FÜR MATHEMATIK UND VERMESSUNGSLEHRE AN DER KÖNIGL. POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU DRESDEN.

MIT EINEM VORWORTE

VON

Dr. O. SCHLÖMILCH,

KÖNIGL. SÄCHS. HOFRATH, PROFESSOR ETC. ETC.

IN ZWEI THEILEN.

ERSTER THEIL:

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOSTATIK.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER,

1867.

Vorrede.

Wenn es schon zur tieferen Kenntniss einer fremden Sprache unerlässlich ist, nicht nur das Geschriebene oder Gesprochene zu verstehen, sondern auch selbst die Sprache reden zu können, so darf man von der Sprache der exacten Wissenschaften um so mehr behaupten, dass sie nicht blos gelernt, sondern auch geübt sein will. Findet man doch häufig genug unter seinen Zuhörern solche, keineswegs unbegabte Studirende, welche zwar alles Vorgetragene bestens verstanden haben, die sich aber äusserst ungeschickt anstellen, sobald ihnen die selbständige Lösung einer Aufgabe zugemuthet wird, die etwas mehr verlangt als die Substitution specieller Werthe in allgemeine Formeln. Dieser Erfahrung dankt das hiesige Polytechnikum schon seit langer Zeit die bewährte Einrichtung, den Vorträgen über reine und angewandte Mathematik besondere Repetitionen beizugeben. Letztere beschränken sich nicht auf eine blosse Wiederholung des Vorgetragenen, vielmehr suchen sie durch zahlreiche Beispiele, welche von den Studirenden theils coram omnibus weiss auf schwarz gerechnet, theils zu Hause bearbeitet werden, dem Jünger der Wissenschaft die erforderliche Gewandtheit in der Lösung von Aufgaben zu verschaffen. Die nämliche Einrichtung empfiehlt auch der deutsche Ingenieurverein in seinem Organisationsplane der polytechnischen Institute, jedoch mit dem ausdrücklichen Wunsche, dass die Repetitionen womöglich von dem vortragenden Professor selbst abgehalten werden möchten. Gegen die Zweckmässigkeit dieses Vorschlags lässt sich aber ein Bedenken erheben. Da Niemand seine Individualität verleugnen kann, so wird der repetirende Professor seiner Anschauungs- und Ausdrucksweise treu bleiben, also nur noch einmal sagen, was er schon im Vortrage gesagt hat; der Assistent dagegen bringt die Sache unter einem anderen Gesichtspunkte und in anderer Redeform wieder und bietet damit dem Zuhörer eine neue Seite des Gegenstandes dar. Wir machen ja nicht selten die Erfahrung,

dass von zwei Rednern, die ihr Thema mit gleicher Klarheit behandeln, der eine sympathischer für uns ist als der andere und dass wir eben desshalb den ersten leichter verstehen, während Andere den zweiten vorziehen; giebt man diess zu, so muss man es gerade bei abstracten Wissenschaften für einen Vortheil halten, wenn dem Studirenden die Gelegenheit geboten wird, über denselben Gegenstand zwei verschiedene Docenten zu hören. Eine praktische Schwierigkeit dürfte hieraus nicht entspringen, sobald sich der Assistent im Allgemeinen dem Gedankengange des Professors anzuschmiegen weiss, und der Professor kein Pedant ist, der da meint, dass es ohne seine sacramentalen Formeln gar nicht gehen könne.

Das hiesige Polytechnikum besitzt glücklicherweise in Herrn Dr. Fuhrmann einen Assistenten, der meine Vorträge über höhere Analysis und analytische Mechanik wirksam zu unterstützen versteht, und ich habe es daher gern übernommen, diesem ersten Werke desselben einige empfehlende Worte auf den Weg zu geben. Sowohl für Repetitionen als für das Selbststudium ist eine Aufgabensammlung ohne Zweifel ein willkommenes Hülfsmittel, und da in der That keine Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Mechanik existirt, welche den Bedürfnissen der Studirenden an Universitäten und polytechnischen Instituten entspricht, so dürfte das vorliegende Buch wohl als eine zeitgemässe Erscheinung gelten. Der erste Theil desselben, welchem ein zweiter unverzüglich folgen wird, enthält nur Aufgaben aus der Statik fester Körper, wobei Probleme über die Elasticität und Festigkeit ausgeschlossen wurden, weil diese an polytechnischen Schulen in besonderen Vorlesungen ausführlich behandelt zu werden pflegen. Die meisten der mitgetheilten, für das erste Studium der analytischen Mechanik berechneten Aufgaben sind neu; Bekanntes ist selten und nur dann aufgenommen worden, wenn sich später eine Verweisung darauf nöthig machte. Bei schwereren Aufgaben findet man eine Andeutung über den Gang der Auflösung, bei leichteren ist nur das Resultat angegeben. Und damit sei diese anspruchslose, jedenfalls aber brauchbare Schrift den Lehrern und Jüngern der Wissenschaft bestens empfohlen.

Dresden, im August 1867.

Schlömilch.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Aufgaben über die Bestimmung der Masse und des Gewichtes ungleichförmig dichter Körper.

Erklärung. Zwischen der Masse M, dem Volumen V und der Dichtigkeit ε eines homogenen Körpers besteht bekanntlich die Beziehung

1) $$M = V\varepsilon.$$

Ist der Körper nach einem bestimmten Gesetze veränderlich dicht, bezieht man ihn auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und versteht unter ε die im Punkte $x\,y\,z$ herrschende Dichtigkeit, so geht diese Gleichung über in

2) $$M = \int \varepsilon\, d\, V.$$

Hierbei ist das Integral ein einfaches, wenn man die Volumenelemente lamellenartig, also mit nur einer unendlich kleinen Dimension, wählen kann, ein doppeltes, wenn dieselben stabförmig sind, ein dreifaches, wenn sie drei unendlich kleine Ausdehnungen haben.

Im letzteren Falle hat die Gleichung für rechtwinklige Coordinaten die Form

3) $$M = \int\int\int \varepsilon\, dx\, dy\, dz,$$

in welcher ε im Allgemeinen eine Function von x, y und z ist.

Wird der Körper hingegen auf polare Coordinaten (Kugelcoordinaten) bezogen und werden diese mit r, ψ und ω bezeichnet, so geht 3) in

4) $$M = \int\int\int \varepsilon\, r^2 \sin\psi\, d\psi\, d\omega\, dr$$

über, worin im Allgemeinen $\varepsilon = \varphi\,(r, \psi, \omega)$ ist.

Die Grenzen der Integrationen ergeben sich in jedem speciellen Falle aus der Natur derjenigen Flächen, welche den Körper einschliessen.

Manchmal ist es vortheilhaft, statt der rechtwinkligen, oder statt der Kugelcoordinaten, lieber cylindrische zu nehmen.

Ist die Masse M eines ungleichförmig dichten Körpers bekannt, so hat man seine mittlere Dichtigkeit

$$5)\qquad \varepsilon_m = \frac{M}{V}.$$

Unter Beachtung dieser Bemerkungen wird es leicht sein, die folgenden Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1. Die Dichtigkeit ε eines geraden elliptischen Cylinders von der Höhe h und den Basishalbachsen a und b, wächst proportional dem Quadrate des Abstandes von seiner Grundfläche. In der Entfernung 1 von derselben ist sie gleich k. Welches ist die Masse M und die mittlere Dichtigkeit ε_m des Cylinders?

Lösung. Nimmt man die Cylinderbasis als xy-Ebene, die Achse als z-Achse, so hat man

$$M = \int_0^h (k z^2)(a b \pi)\, d z,$$

$$M = \tfrac{1}{3}\pi a b k h^3 = (a b \pi) h (\tfrac{1}{3} k h^2);$$

$$\varepsilon_m = \tfrac{1}{3} k h^2.$$

Die mittlere Dichtigkeit ist also $\frac{1}{3}$ von der, welche in der Deckfläche herrscht.

Aufgabe 2. Ein gerader Kreiscylinder vom Basisradius a und der Höhe h besitzt eine Dichtigkeit, welche überall umgekehrt proportional dem Abstande von der Achse ist. Für die Einheit dieses Abstandes hat sie den Werth k. Man verlangt die Masse und die mittlere Dichtigkeit zu wissen.

Lösung: Für die Masse ergiebt sich

$$M = 2\pi a h k;$$

für die mittlere Dichtigkeit

$$\varepsilon_m = 2\frac{k}{a},$$

letztere ist also das Doppelte von der in der Mantelfläche stattfindenden.

Aufgabe 3. Die Dichtigkeit einer Kugel ändert sich proportional dem Radius r nach concentrischen Schalen und hat den Werth k, wenn $r = 1$ ist. Der Halbmesser der Oberfläche ist a. Zu bestimmen sind die Masse und die mittlere Dichtigkeit.

L ö s u n g: Unter Benutzung von Polarcoordinaten, die natürlich hier am vortheilhaftesten sind, hat man (Erklär. Gl. 4)

$$M = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k r^3 \sin\psi \, dr \, d\psi \, d\omega,$$

oder sogleich einfacher, wenn man aus Schalen zusammensetzt

$$M = \int_0^a kr \, . \, 4 \pi r^2 \, dr$$

Hieraus folgt:

$$M = \pi k a^4$$

und

$$\varepsilon_m = \tfrac{3}{4} a k.$$

Die mittlere Dichtigkeit ist also eben so gross, wie die im Abstande $\frac{3}{4} a$ herrschende.

Aufgabe 4. Wie Aufgabe 3, nur mit dem Unterschiede, dass sich die Dichtigkeit umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ändert.

L ö s u n g: $M = 4 \pi a k$; $\theta_m = 3 \frac{k}{a^2}$, d. i. das Dreifache von derjenigen Dichtigkeit, die der Kugeloberfläche zukommt.

Aufgabe 5. In der xy-Spur eines mit dem Radius c construirten Kugeloctanten, welcher auf ein rechtwinkliges System bezogen und so gelegen ist, dass der Coordinatenanfang O seinen Mittelpunkt bildet, wird eine Gerade gezeichnet, die auf der x-Achse die Strecke $OA = a$ $(< c)$ und auf der y-Achse $OB = b$ $(< c)$ abschneidet.

I. Wie gross ist die Masse M desjenigen Theiles des Octanten, welcher senkrecht über dem Dreiecke OAB steht, wenn die Dichtigkeit ε proportional dem Abstande von der xy-Ebene wächst und für $z = 1$ den Werth k hat? II. Welche Grösse hat sie für $a = b = c$?

L ö s u n g. I.

$$M = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}} kz \, dx \, dy \, dz,$$

$$M = \tfrac{1}{24} \, ab \, k \, (6 c^2 - b^2 - a^2).$$

II. Wenn $a = b = c$, so ist die Masse eben so gross, wie die einer homogenen Pyramide, deren Basis das Dreieck OAB, deren Höhe c und deren Dichtigkeit gleich derjenigen, welche im obersten Punkte des Kugeloctanten herrscht.

Aufgabe 6. Auf den Achsen der x, y und z eines rechtwinkligen Coordinatensystems schneidet eine Ebene die Strecken $OA = a$, $OB = b$ und $OC = c$ ab. Welches Gewicht P hat die Pyramide $OABC$, wenn das der Volumeneinheit im Abstande 1 von O gleich k ist und es sich nach Kugelschalen, die um O concentrisch sind, proportional dem Quadrate der Entfernung von diesem Punkte ändert? Welches ist das mittlere Gewicht p_m der Pyramide?

Lösung. Nach Anleitung von Formel 3) der Erklärung findet man

$$P = \tfrac{1}{60} k\, a\, b\, c\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

oder, wenn das Gewicht der Volumeneinheit, welches im Punkte abc herrschen würde, mit γ bezeichnet wird,

$$P = \tfrac{1}{60} a\, b\, c\, \gamma.$$

Für das mittlere Gewicht ergiebt sich

$$p_m = \tfrac{1}{10} k\,(a^2 + b^2 + c^2) = \tfrac{1}{10}\gamma.$$

Aufgabe 7. Die Dichtigkeit eines Körpers, welcher von der Fusspunktfläche eines dreiachsigen Ellipsoids umschlossen ist, ändert sich umgekehrt proportional dem Abstande vom Flächenmittelpunkte und ist für die Einheit dieses Abstandes $= k$. Wie gross ist seine Masse?

Lösung: Bezeichnet man mit r_1 den Radiusvector eines Oberflächenpunktes, so ist

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_1} \frac{k}{r} r^2 \sin\psi\, d\omega\, d\psi\, dr = \tfrac{1}{2} k \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r_1^{\,2} \sin\psi\, d\omega\, d\psi.$$

Da nun die Gleichung der Fusspunktfläche des aus den Halbachsen a, b und c construirten Ellipsoids für rechtwinklige Coordinaten

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2,$$

also für polare

$$r_1^{\,2} = a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi\cos^2\omega + c^2\sin^2\psi\sin^2\omega$$

ist, so ergiebt sich für die Masse

$$M = \tfrac{2}{3}\pi k\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

d. i. die Häfte von der einer Kugel, welche die constante Dichtigkeit $\frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ und den Radius $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ hat.

Capitel I.

Aufgaben über das Gleichgewicht eines vollkommen freien Punktes.

Erklärung. Den Aufgaben dieses Capitels liegt der bekannte Satz zu Grunde, dass man mittelst des Kräfteparallelogrammes beliebig viele Kräfte, welche an einem Punkte angreifen, zusammensetzen oder zerlegen und damit über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein des Gleichgewichts urtheilen kann.

Aufgabe 8. Auf einen Punkt wirken die Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$, welche mit den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_n$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\ldots \gamma_n$ (die stets in demselben Sinne zu zählen sind) bilden. Man sucht I. die Resultante R der Kräfte nach Grösse und Richtung; II. die Bedingungen für das Gleichgewicht des Punktes.

Lösung. I. Werden die Kräfte $P_1, P_2, \ldots. P_n$ in Componenten zerlegt, welche parallel zu den Coordinatenachsen wirken, werden diese mit $X_1, Y_1, Z_1, \ldots.$ bezeichnet, und wird $\Sigma(P\cos\alpha)=X$, $\Sigma(P\cos\beta)=Y$, $\Sigma(P\cos\gamma)=Z$ gesetzt, so ist

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$\cos(R,X)=\frac{X}{R},\ \cos(R,Y)=\frac{Y}{R},\ \cos(R,Z)=\frac{Z}{R},$$

womit Grösse und Richtung der Resultante bestimmt sind.

II. Im Gleichgewichte ist der Punkt, wenn

$$X=\Sigma(P\cos\alpha)=0,$$
$$Y=\Sigma(P\cos\beta)=0,$$
$$Z=\Sigma(P\cos\gamma)=0,$$

Aufgabe 9. Ein frei beweglicher Punkt P, der die Masse 1 hat und in der Verbindungsgeraden AB von zwei festen Punkten A und B liegt, wird durch diese nach dem Newton'schen Gesetze angezogen.

Die Punkte A und B haben die Massen M und m; ihr Abstand ist a. I. In welcher Entfernung x von A ist P im Gleichgewichte? II. An welcher Stelle zwischen Mond und Erde ist Gleichgewicht, wenn die Mondmasse $m = \frac{1}{81}$ der Erdmasse M genommen und als bekannt vorausgesetzt wird, dass man sich diese Massen in den Mittelpunkten der beiden Himmelskörper concentrirt denken darf.

Lösung. I. Das Gleichgewicht findet Statt, wenn

$$\frac{kM}{x^2} = \frac{km}{(a-x)^2};$$

hieraus folgt:

$$x = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\, a.$$

II.

$$x = \tfrac{9}{10}\, a.$$

Der andere Werth von x, welchen die quadratische Gleichung liefert, giebt die Lage derjenigen Stelle an, bei welcher die Anziehungen zwar gleich gross sind, aber in demselben Sinne wirken, so dass daselbst kein Gleichgewicht herrschen kann.

Aufgabe 10. Drei feste Punkte, C_1, C_2 und C_3, welche die Massen m_1, m_2 und m_3 haben und deren gegenseitige Lage bekannt ist, wirken anziehend auf einen freibeweglichen Punkt Q von der Masse 1. Die Anziehungen sind proportional den Entfernungen und den Massen. Es soll bestimmt werden, wo der Punkt P im Gleichgewichte sein wird.

Lösung. Legt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene $C_1\, C_2\, C_3$ so, dass $C_1\, C_2$ die x-Achse und C_1 der Anfangspunkt derselben ist, bezeichnet man ferner die Abscissen von C_2, C_3 und Q mit a_2, a_3 und x, die Ordinaten von C_3 und Q mit b_3 und y, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts

$$-m_1 x + m_2 (a_2 - x) - m_3 (x - a_3) = 0 \text{ und}$$
$$-m_1 y - m_2 y + m_3 (b_3 - y) = 0.$$

Mithin ergiebt sich

$$x = \frac{a_2 m_2 + a_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$y = \frac{b_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

also für $m_1 = m_2 = m_3 = m$ sehr einfach $x = \frac{1}{3}(a_2 + a_3)$ und $y = \frac{1}{3} b_3$.

Aufgabe 11. Ein freibeweglicher Punkt P, der die Masse 1 hat, wird von drei festen Punkten, welchen bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem die Abscissen o, a und c, die Ordinaten o, o und b

zukommen, nach dem Newton'schen Gesetze angezogen. Der dritte der festen Punkte (B) hat die Masse m_3. Es soll bestimmt werden, I. welche Massen m_1 und m_2 die Punkte O und A haben müssen, wenn P an der Stelle xy im Gleichgewichte sein soll; II. wie gross m_1 und m_2 für $c=\frac{a}{2}, b=\frac{a}{2}\sqrt{3}, x=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{6}\sqrt{3}$ zu sein nöthig haben.

Lösung. I. Man findet leicht

$$m_1=\frac{(a-x)\,b-(a-c)\,y}{a\,y}\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{(x-c)^2+(b-y)^2}\right)^3}\cdot m_3$$

und

$$m_2=\frac{bx-cy}{ay}\sqrt{\left(\frac{(a-x)^2+y^2}{(x-c)^2+(b-y)^2}\right)^3}\cdot m_3,$$

welche Ausdrücke nur so lange für brauchbar gelten können, als sie positiv sind.

II. Für die obigen speciellen Werthe ergiebt sich

$$m_1=m_2=m_3,$$

was auch ohne Weiteres aus der Anschauung folgt.

Capitel II.

Aufgaben über das Gleichgewicht eines unvollkommen freien Punktes.

Erklärung. Auf einer ebenen, absolut starren Curve wird ein Punkt, auf welchen beliebig viele Kräfte wirken, natürlich nur dann im Gleichgewichte sein können, wenn die Resultante derselben senkrecht auf der Curventangente steht. (Den Widerstand, welchen die Curve leistet, kann man sich hierbei als eine Normalkraft in Rechnung gebracht denken.)

Ganz Aehnliches gilt, wenn der Punkt auf einer doppelt gekrümmten Linie, oder auf einer Fläche beweglich ist.

Diese Bemerkungen genügen zur Lösung der Aufgaben dieses Capitels.

A. Gleichgewicht eines Punktes auf einer ebenen Linie.

Aufgabe 12. Auf einen materiellen Punkt, der sich nur auf der starren Linie $y=f(x)$ bewegen kann, wirken beliebig viele Kräfte in der Ebene der Curve. I. Welches sind die analytischen Bedingungen für das Gleichgewicht desselben? II. An welchen Stellen herrscht es? III. Wie gross ist der Druck D, den die Linie im Gleichgewichtszustande erleidet? IV. Wie lassen sich die gefundenen Resultate auf eine Curve anwenden, deren Gleichung in der unentwickelten Form $F(x,y)=0$ gegeben ist?

Lösung. I. Um auf das Gleichgewicht eines vollkommen freien Punktes zurückzukommen, denken wir uns den Widerstand der Curve durch eine Kraft N ersetzt. Wir bezeichnen ferner mit U und V die parallel zur x- und y-Achse wirkenden Componenten der Resultante aller Kräfte; mit w den Winkel, welchen N mit der x-Achse einschliesst.

Dann befindet sich der Punkt offenbar in Ruhe, wenn

$$U + N\cos w = 0 \text{ und}$$
$$V + N\sin w = 0.$$

Mithin ist

$$\frac{V}{U} = \tan w = -\cot\tau,$$

also

1) $$U + V\frac{dy}{dx} = 0.$$

die Bedingung des Gleichgewichts.

II. Die Coordinaten x und y der Ruhelagen ergeben sich in jedem speciellen Falle aus dieser Gleichung und aus der der Linie selbst.

III. Der absolute Werth des Druckes ist

2) $$D = \sqrt{U^2 + V^2};$$

die Richtung desselben folgt leicht aus denen von U und V.

IV. Ist die Gleichung der Curve in der unentwickelten Form $F(x,y) = 0$ gegeben, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Die Gleichung 1) geht also in

3) $$U\frac{\partial F}{\partial y} - V\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

über.

Alles Andere bleibt wie vorher.

Aufgabe 13. Eine Curve von der Gleichung $y = f(x)$ rotirt mit der Winkelgeschwindigkeit w um die y-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems. An welchen Stellen derselben ist ein schwerer Punkt von der Masse 1 im Gleichgewichte?

Lösung. Wenn sich der Punkt an der Stelle xy befindet, so sind die auf ihn wirkenden Kräfte: $U = w^2 x$ und $V = -g$.

Nach Aufgabe 12 Gl. 1) findet also Gleichgewicht Statt, wenn

1) $$w^2 x - g\frac{dy}{dx} = 0$$

ist, also da, wo

$$x = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Aufgabe 14. Wie Aufgabe 13, die Curve aber ein die x-Achse berührender Kreis, dessen Radius a ist und dessen Mittelpunkt auf der y-Achse liegt.

Lösung. Da die Kreisgleichung $x^2+(a-y)^2=a^2$ ist, so geht Gl. 1) der Aufgabe 13 über in

$$w x^2 \mp \frac{g x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0 \text{ oder}$$

$$x\left(w^2 \mp \frac{g}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=0.$$

Mithin ist Gleichgewicht für $x=0$, was selbstverständlich ist, und für

$$x=\pm\sqrt{a^2-\frac{g^2}{w^4}},$$

was nur möglich, wenn $\frac{g}{w^2}<a$, also $w>\sqrt{\frac{g}{a}}$.

An den Enden des horizontalen Durchmessers würde der Punkt nur bei unendlich grosser Winkelgeschwindigkeit in Ruhe sein können.

Aufgabe 15. Wie Aufgabe 13, die Curve aber eine, aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse, welche so liegt, dass ihr Mittelpunkt sich in der y-Achse im Abstande b vom Coordinatenanfange befindet und ihre grosse Achse parallel zu der der x ist.

Lösung. Ganz wie in der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe ergeben sich als Abscissen der Gleichgewichtsstellen, ausser dem selbstverständlichen $x=0$,

$$x=\pm\frac{1}{a w^2}\sqrt{a^4 w^4-b^2 g^2},$$

was nur so lange möglich ist, als $w>\sqrt{\frac{b g}{a^2}}$

Aufgabe 16. Ebenfalls wie Aufgabe 13, die Curve jedoch eine Hyperbel, deren Halbachsen a und b, deren Hauptachse die y-Achse und deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang. Gefragt: I. Wo ist der Punkt im Gleichgewichte? II. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit w muss sich die Linie drehen, wenn $b=a=\frac{g}{\sqrt{2}}$ und wenn der Punkt an der Stelle $x=b$ in Ruhe sein soll?

Lösung. I. Man findet als Abscissen der Ruhestellen, ausser $x=0$,

$$x=\pm\frac{1}{b w^2}\sqrt{a^2 g^2-w^4 b^4},$$

mithin als Ordinaten

$$y = \pm \frac{a^2 g}{b^2 w}.$$

II. Für den vorgeschriebenen speciellen Fall muss $w = 1$ sein.

Aufgabe 17. Auch wie Aufgabe 13, die rotirende Linie aber eine gemeine Parabel, deren Achse die y-Achse und deren Halbparameter $= p$.

Lösung. Hier ergiebt sich als Gleichgewichtsbedingung

$$x\left(w^2 - \frac{g}{p}\right) = 0.$$

Wenn also $w \gtrless \sqrt{\frac{g}{p}}$, so ist der Punkt nur im Scheitel der Parabel in Ruhe; wenn $w = \sqrt{\frac{g}{p}}$ oder $p = \frac{g}{w^2}$, so ruht er an jeder Stelle derselben. (Vergl. Aufg. 29.)

Aufgabe 18. I. An welchen Stellen der Curve $y = f(x)$ ist ein materieller Punkt im Gleichgewichte, wenn auf denselben parallel zur y-Achse die constante Kraft B, parallel der x-Achse aber die Kraft kx^2 wirkt? II. Wo liegen diese Gleichgewichtsstellen, wenn B die Schwere ist für α) die Gerade $y = Ax + b$, β) die Parabel $y = \frac{x^2}{2p}$ und γ) für die Curve $y = \frac{1}{3} Cx^3$?

Lösung. I. Das Gleichgewicht findet an denjenigen Stellen der Curve Statt, für welche

$$k x^2 + B \frac{dy}{dx} = 0.$$

II. Für die Gerade da, wo

$$x = \pm \sqrt{\frac{gA}{k}};$$

für die Parabel, ausser für $x = 0$, an der Stelle

$$x = \frac{g}{kp};$$

für die Curve $y = \frac{1}{3} cx^3$, entweder nur für $x = 0$, oder überall, je nachdem $k \gtrless cg$, oder $k = cg$ ist.

Aufgabe 19. Auf einer gemeinen Cycloide, deren Anfangspunkt der der Abscissen und deren Basis die x-Achse, befindet sich ein materieller Punkt, auf welchen parallel zu den Achsen der x und der y die constanten Kräfte A und B wirken. An welchen Stellen der Linie ist er im Gleichgewichte?

Lösung: Nach Aufgabe 12 Gl. 1) ist die Gleichgewichtsbedingung allgemein

$$U + V\frac{dy}{dx} = 0.$$

Bezeichnet a den Radius des rollenden Kreises und w den Wälzungswinkel, so hat man für die gegebene Cycloide bekanntlich die Gleichungen

$$y = a\,(1 - \cos w),\quad x = a\,(w - \sin w),\ \text{also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin w}{1 - \cos w} = \cot \tfrac{1}{2} w.$$

Mithin ist der Punkt im Gleichgewichte, wenn

$$A + B \cot \tfrac{1}{2} w = 0,\ \text{also wenn}$$

$$w = 2 \operatorname{arc\,tan}\left(-\frac{B}{A}\right);$$

z. B. für $B = A$, wenn

$$w = \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{7}{2}\pi, \ldots\ldots$$

Aufgabe 20. Ein Punkt, der sich nur längs einer verticalen Ellipse bewegen kann, wird von zwei Gewichten beeinflusst; das eine (P) wirkt an einem Faden, welcher durch den Mittelpunkt geht, das andere (Q) am Punkte vertical abwärts. Man sucht die Abscissen der Ruhelagen I. für beliebige gegenseitige Grössen von P und Q, II. für $P = Q$.

Lösung. I. Hier muss

$$-P\frac{x}{r} + \left(P\frac{y}{r} + Q\right)\frac{b^2 x}{a^2 y} = 0.$$

sein, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Dasselbe herrscht also, ausser für $x = 0$, da, wo

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^4 P^2 - b^4 Q^2}{c^2 P^2 + b^2 Q^2}},\quad (a^2 - b^2 = c^2),$$

oder, wenn man $a^2 - b^2 = \frac{b^2}{\gamma^2}$ setzt, da, wo

$$x = a\sqrt{\frac{P^2 - \gamma^4 Q^2}{P^2 + \gamma^2 Q^2}},$$

was nur so lange brauchbar ist, als $P > \frac{b^2}{c^2}\,Q$.

II. Für $P = Q$ ist Gleichgewicht, wenn

$$x = 0,\ \text{oder}\ x = a\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - b^2}},\quad a > b\sqrt{2}.$$

Aufgabe 21. Wie Aufgabe 20, nur geht der Faden, an welchem das Gewicht P hängt, nicht durch den Ellipsenmittelpunkt, sondern durch denjenigen Brennpunkt, der auf der Seite der positiven x liegt.

Lösung. I. Gleichgewichtsbedingung:

$$-P\frac{x-c}{r}+\left(P\frac{y}{r}+Q\right)\frac{b^2x}{a^2y}=0$$

Aus derselben folgt

$$c\,P\,y\,(a^2-c\,x)+b^2\,Q\,r\,x=0$$

und, wenn man beachtet, dass $a^2-c\,x=a\,r$ ist,

$$x=-\frac{a\,c\,P}{\sqrt{c^2P^2+b^2Q^2}}.$$

II. Für $P=Q$ wird $x=-c$.

Aufgabe 22. Auf einer Curve von der Gleichung

$$y+\sin y=x$$

befindet sich ein materieller Punkt. Parallel zur x- und y-Achse wirken auf denselben die constanten Kräfte A und B. An welchen Stellen der Linie ist er im Gleichgewichte?

Lösung. Nach Anleitung der Gl. 3) der Aufgabe 12 ergiebt sich

$$y=\arccos\left(-\frac{A+B}{A}\right)$$

als Ordinate der gesuchten Gleichgewichtsstelle. Dieselbe ist nur so lange reell, als $A+B<A$ ist.

Aufgabe 23. Wo ist ein materieller Punkt von der Masse 1 auf der Curve

$$\arctan\frac{y}{x}-l\left(\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right)=0$$

in Ruhe, wenn er nur der Wirkung seiner eignen Schwere unterliegt?

Lösung. Wie in der Auflösung der vorigen Aufgabe findet man

$$-g\frac{x+y}{x^2+y^2}+0$$

als Gleichgewichtsbedingung. Dies ist an denjenigen Punkten erfüllt, bei welchen die rechtwinkligen Coordinaten x und y gleich, aber entgegengesetzt sind.

Beachtet man, dass die gegebene Curvengleichung für polare Coordinaten in

$$r=a\,e^{\theta}$$

übergeht, also eine logarithmische Spirale bedeutet, so ist dieses Resultat selbstverständlich (wegen der bekannten Lage der Tangenten).

Aufgabe 24. Auf einen Punkt, der sich nur in einer röhrenförmigen logarithmischen Spirale von der Gleichung $r = ae^{\theta}$ bewegen kann, wirken beliebige Kräfte in der Ebene, welche parallel zu den Achsen des rechtwinkligen Coordinatensystems XOY die Componenten U und V geben. I. An welchen Stellen der Curve ist der Punkt im Gleichgewichte? II. Wie gestaltet sich das Resultat, wenn nur die Schwere g wirkt? III. Wie, wenn der Punkt nur von einer Kraft $R = f(r)$ beeinflusst wird, welche ihn nach dem asymptotischen Punkte der Spirale zu ziehen strebt?

Lösung. I. Auf einer Curve von der Gleichung $y = f(x)$ würde der Punkt (nach Aufgabe 12) im Gleichgewichte sein, wenn $U + V\frac{dy}{dx} = 0$ wäre. Mittelst der bekannten Transformationsformeln

$$x = r\cos\theta \text{ und } y = r\sin\theta$$

folgt hieraus, dass auf der Linie $r = f(\theta)$ das Gleichgewicht dann herrscht, wenn

$$U + V\frac{r'\tan\theta + r}{r' - r\tan\theta} = 0,$$

$\left(\text{wobei } r' = \frac{dr}{d\theta}\right)$.

Für die vorliegende logarithmische Spirale sind mithin die Gleichgewichtsstellen da, wo

$$\tan\theta = \frac{U+V}{U-V}.$$

II. Wirkt nur die Schwere, so liegen diese Ruhepunkte bei

$$\theta = \tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi, \ldots\ldots$$

III. Wenn nur die Kraft $R = f(r)$, nach dem Mittelpunkte zu ziehend, thätig ist, so befindet sich, wie aus der obigen Gleichung für $\tan\theta$ sehr leicht folgt, der Punkt nirgends, ausser in jenem Mittelpunkte selbst, im Gleichgewichte.

Aufgabe 25. Nach welchem Gesetze muss eine Tangentialkraft T veränderlich sein, wenn sie einen Punkt, auf welchen parallel zur x-Achse die constante Kraft K wirkt, an jeder Stelle der Curve $y = f(x)$ im Gleichgewichte halten soll?

Lösung. Man findet sehr leicht

$$T = K\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = K\frac{y}{N};$$

die Tangentialkraft muss sich also zu der constanten Kraft K stets verhalten, wie die Curvenordinate zur Länge der zugehörigen Normale.

Aufgabe 26. I. Welcher Art muss die Kraft U sein, welche, im Sinne der positiven x wirkend, hervorbringt, dass ein schwerer Punkt von der Masse 1 auf der allgemeinen Curve $y=f(x)$ überall im Gleichgewichte ist? II. Welche Werthe hat sie, wenn die Curve α) eine gemeine Parabel vom Halbparameter p, deren Achse die y-Achse und deren Scheitel der Coordinatenanfang; β) wenn sie eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die x- und y-Achse und deren Halbachse $= a$?

Lösung. I. Nach Aufgabe 12 Gl. 1) folgt sofort

$$U = g\frac{dy}{dx} = gy'.$$

II. α) $$U = \frac{g}{p}x;\ \beta)\ U = -\frac{a^2 g}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

Im ersteren Falle (Parabel) muss die Kraft U also proportional dem Abstande von der y-Achse, im letztern umgekehrt proportional dem Quadrate dieses Abstandes sein und im Sinne der negativen x wirken.

Aufgabe 27. Auf was für einer Widerstand leistenden Linie ist ein Punkt überall im Gleichgewichte, wenn auf denselben parallel zur x-Achse eines rechtwinkligen Systems eine constante Kraft A, parallel zur y-Achse eine ebenfalls constante B wirkt?

Lösung. Nach Aufgabe 12 Gl. 1) ist die Gleichgewichtsbedingung

$$U + V\frac{dy}{dx} = 0;$$

mithin genügt diejenige Linie der gestellten Anforderung, welche die Differentialgleichung

$$A + B\frac{dy}{dx} = 0$$

hat. Aus dieser folgt

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B},$$

wobei C eine beliebige Constante. Die Linie ist also eine Gerade, welche mit der x-Achse einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $-\frac{B}{A}$ ist und die auf der y-Achse die Strecke $\frac{C}{B}$ abschneidet.

Aufgabe 28. Wie Aufgabe 27; die Kräfte sind aber parallel der x-Achse, im Sinne der negativen x, eine umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes von der y-Achse wirkende und die eigene

Schwere des mit der Masse 1 versehenen Punktes, welche in der Richtung der negativen y thätig ist.

Lösung. Hier hat man als Gleichgewichtsbedingung

$$-\frac{k}{x^2}-g\frac{dy}{dx}=0.$$

Aus derselben folgt durch Integration

$$x(y-c)=\frac{k}{g}.$$

Das bedeutet bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel, die als die eine Asymptote die y-Achse, als die andere eine Parallele zur x-Achse, im Abstande c, hat und deren Halbachsen $=\sqrt{\frac{2k}{g}}$ sind. Hierbei ist c eine beliebige Constante, k die Intensität, welche die parallel zur x-Achse wirkende Kraft für $x=1$ hat.

Aufgabe 29. Eine ebene Curve dreht sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w um die verticale y-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Auf derselben befindet sich ein schwerer Punkt von der Masse 1, der sich nicht von ihr zu entfernen vermag. Man soll bestimmen, welcher Art die Linie sein muss, wenn der Punkt an allen Stellen derselben im Gleichgewichte sein soll.

Lösung. Die wirkenden Kräfte sind

$$U=w^2x \text{ und } V=-g.$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist daher

$$w^2x-g\frac{dy}{dx}=0.$$

Mithin genügt den Bedingungen der Aufgabe diejenige Curve, deren Gleichung

$$x^2=\frac{2g}{w^2}(y+c),$$

d. h. jede gemeine Parabel vom Halbparameter $\frac{g}{w^2}$, deren Achse die Drehachse und deren Scheitel um die beliebige Strecke c vom Coordinatenanfange entfernt liegt. (Vergl. Aufg. 17.)

Aufgabe 30. Es soll die Linie bestimmt werden, auf welcher ein Punkt überall im Gleichgewichte ist, wenn auf denselben parallel zur y-Achse immer die constante Kraft B, parallel der x-Achse hingegen eine variabele wirkt, die proportional der n^{ten} Potenz der Abscisse ist und für $x=1$ die Intensität k hat.

Lösung. Nach Gl. 1) Aufgabe 12 muss die gesuchte Linie der Bedingung

$$kx^n+By'=0$$

genügen, es muss also

$$y = -\frac{k}{B}\int x^n\,dx$$

ihre Gleichung sein. Für $n \gtrless -1$ ist dies

$$y = -\frac{k}{(n+1)B}x^{n+1} + Const;$$

für $n = -1$

$$y = -\frac{k}{B}lx + Const.$$

(Specielle Fälle bieten die Aufgaben 27, 28 und 29).

Aufgabe 31. Welcher Art ist die Linie, auf der ein materieller Punkt überall in Ruhe ist, wenn auf denselben parallel zu den Achsen des rechtwinkligen Coordinatensystems die Kräfte $U = Ax$ und $V = By$ wirken?

Lösung. Man findet leicht, dass die gesuchte Curve eine Ellipse, deren Halbachsen a und b sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Constanten A und B verhalten, sonst aber beliebig sind, deren Gleichung also

$$\frac{A}{C}x^2 + \frac{B}{C}y^2 = 1$$

ist.

Aufgabe 32. Auf einen materiellen Punkt wirkt parallel der x-Achse eine Kraft, umgekehrt proportional dem Abstande von der y-Achse, parallel der y-Achse eine andere, umgekehrt proportional dem von der x-Achse. Beide haben für die Einheit des Abstandes die Intensität A.

I. Es soll die Curve bestimmt werden, auf welcher der Punkt überall im Gleichgewichte ist. II. Die Grösse D des Normaldruckes, den die Linie an jeder Stelle xy auszuhalten hat. III. Der Ort in derselben, an welchem dieser Druck am kleinsten ist.

Lösung. I. Nach Gl. 1) der Aufgabe 12 ergiebt sich, dass die verlangte Linie eine gleichseitige Hyperbel ($xy = c$) ist, deren Asymptoten die Coordinatenachsen und deren Halbachsen beliebig sind.

II. Der Normaldruck an der Stelle xy ist (nach Gl. 2) Aufg. 12)

$$D = \sqrt{\frac{A^2}{x^2} + \frac{A^2}{y^2}} = A\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} = \frac{A}{c}\sqrt{\frac{c^2 + x^4}{x^2}}.$$

III. Derselbe ist am kleinsten für

$$x = \sqrt{c}$$

d. h. im Scheitel der Hyperbel. Von diesem aus wächst er nach rechts und links und wird sowohl für $x = 0$, als auch für $x = \infty$ zu ∞.

Aufgabe 33. Eine constante Kraft Q wirkt auf einen materiellen Punkt derart, dass sie ihn nach einer Stelle A hinzuziehen strebt, welche auf der x-Achse, in der Entfernung a vom Coordinatenanfange, liegt. Man soll diejenige Linie bestimmen, auf der der Punkt überall im Gleichgewichte ist.

Lösung. Bezeichnet man den Winkel zwischen der Richtung von Q und zwischen der Ordinate mit w, den Tangentenwinkel mit τ, so sind die Componenten von Q

$$U = A \sin w \text{ und } V = - A \cos w.$$

Da ferner

$$\tan w = \frac{a-x}{y}$$

ist, so lautet die Gleichgewichtsbedingung (Aufgabe 12 Gl. 1)

$$A \frac{a-x}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}} - A \frac{y}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}} y' = 0,$$

oder einfacher

$$1) \qquad y\,dy = (a-x)\,dx.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$y^2 = c^2 - (a-x)^2;$$

die gesuchte Linie ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius beliebig.

Anmerkung. Ohne eine Zerlegung von Q vorzunehmen, gelangt man zu der Gleichung 1) schon durch die Bemerkung, dass nur dann überall Gleichgewicht herrschen kann, wenn die Richtung von Q stets mit der der Normale zusammenfällt, wenn also $w = \tau$, mithin $\tan w = \tan \tau$, daher $\frac{a-x}{y} = \frac{dy}{dx}$ ist.

Aufgabe 34. Auf welcher Curve ist ein schwerer Punkt von der Masse 1 überall im Gleichgewichte, wenn auf denselben, ausser seiner Schwere, eine Kraft $Q = -g \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ wirkt, die ihn immer nach dem Coordinatenanfange hinzieht?

Lösung. Aus der sich leicht ergebenden Gleichgewichtsbedingung folgt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\,y}{a}\right)^2 = 1.$$

Die gesuchte Linie ist mithin eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Anziehungspunkt und deren Halbachsen sich wie $\sqrt{2} : 1$ verhalten, sonst aber beliebig sind.

Aufgabe 35. Eine Gerade QPM (die man sich etwa als eine Zugbrücke denken möge) ist um M (Fig. 1) drehbar und hat das Gewicht G. Von der Mitte derselben geht ein gewichtsloser Faden PRP_1, der die constante Länge λ besitzt, über eine punktförmige Rolle R. An dem Ende P_1 wirkt das Gewicht G_1. Es soll bestimmt werden, auf was für einer Curve RP_1 dieses Gewicht G_1 beweglich sein muss, wenn es dem andern Gewichte G immer das Gleichgewicht halten soll.

Fig. 1.

Lösung. Die Wirkung von G kann man sich in zwei Componenten zerlegt denken, von denen die eine in die Richtung PM fällt, also aufgehoben wird, während die andere den Faden RP spannt. Diese Letztere möge S heissen.

Eben so liefert G_1 eine Componente senkrecht zur Curve RP_1, also von deren Festigkeit aufgehoben, und eine andere S_1, den Faden RP_1 spannend. Gleichgewicht findet mithin Statt, wenn $S = S_1$ ist.

Bezeichnet man nun RP_1 mit r_1, $\angle P_1RM$ mit θ_1, und entnimmt aus der Figur die sich leicht ergebenden Werthe der beiden Spannungen, so gelangt man von $S = S_1$ auf die Gleichung

$$G(\lambda - r_1)\,dr_1 = G_1 a\,d(r_1 \cos\theta_1).$$

Dies giebt, integrirt und vereinfacht,

$$G(\lambda - \tfrac{1}{2} r_1) = G_1 a \cos\theta_1.$$

Soll nun auch dann Gleichgewicht stattfinden, wenn QM die Lage KM hat, so muss

$$\lambda = a\sqrt{2} \text{ und } G_1 = G \sec 45^0 = G\sqrt{2}$$

genommen werden. Damit ergiebt sich

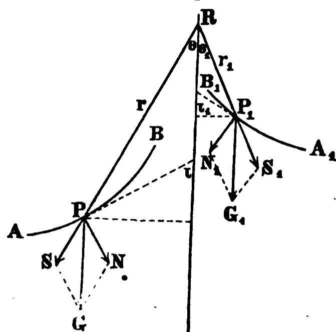
$$r_1 = 4\sqrt{2}\, a \sin^2 \frac{\theta_1}{2}.$$

Dies lehrt, dass die gesuchte Linie eine Cardioide ist, deren rollender und deren als Basis dienender Kreis den Radius $a\sqrt{2}$ haben.

Aufgabe 36. Auf zwei ebenen, absolut widerstehenden Curven AB und A_1B_1, sind zwei Punkte P und P_1 beweglich, welche die Gewichte G und G_1 haben. Dieselben sind durch ein Seil PRP_1 verbunden, das bei R über eine Rolle läuft. Diese Rolle wird als Punkt gedacht; das Seil als undehnbare Gerade; Reibung, Seilgewicht und Seilsteifheit werden nicht in Betracht gezogen. Die Gewichte G und G_1,

die Länge λ des Seiles, sowie die Polargleichung $r = f(\theta)$ der Curve AB sind gegeben. Zu bestimmen ist I. welcher Art die Linie $A_1 B_1$ sein muss, wenn die Punkte P und P_1 in jeder Stellung sich das Gleichgewicht halten sollen; II. wie sich aus den gefundenen Resultaten die der Aufgabe 35 herleiten lassen.

Fig. 2.



Lösung. I. Zerlegt man, wie in der Auflösung der vorigen Aufgabe, die Kräfte G und G_1 wieder in je zwei Componenten (S und N, S_1 und N_1), so ist auch hier wieder Gleichgewicht, wenn $S = S_1$ ist. Dies liefert

$$G \frac{\cos \tau}{\cos(\theta - \tau)} = G_1 \frac{\cos \tau_1}{\cos(\theta_1 - \tau_1)},$$

oder einfacher

$$G(\cos\theta_1 + \sin\theta_1 \tan\tau_1)$$
$$= G_1(\cos\theta + \sin\theta \tan\tau).$$

Drückt man nun τ und τ_1 durch r, r_1, θ und θ_1 aus, so gelangt man auf

$$d(r_1 \cos\theta_1) = k\, d(r\cos\theta),$$

worin zur Abkürzung

$$k = -\frac{G}{G_1}$$

gesetzt ist. Daraus folgt durch Integration

$$r_1 \cos\theta_1 = k r \cos\theta + Const., \text{ oder}$$
$$r_1 \cos\theta_1 = k(\lambda - r_1)\cos\theta + Const.$$

als Gleichung der Curve $A_1 B_1$.

II. Bei dem in Aufgabe 35 vorliegenden Falle besteht zwischen r und θ die Beziehung

$$\cos\theta = \frac{r}{2a} = \frac{\lambda - r_1}{2a}.$$

Beachtet man nun gehörig, dass $\lambda = a\sqrt{2}$ ist, wenn r_1 den Werth 0 hat, dass ferner $G_1 = G \sec 45^0 = G\sqrt{2}$ und $k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ sein muss, weil doch auch Gleichgewicht stattfinden soll, wenn P_1 mit R zusammenfällt (Fig. 1), so erhält man schliesslich

$$r_1 = 2\sqrt{2}\, a(1 - \cos\theta_1) \text{ oder}$$
$$r_1 = 4\sqrt{2}\, a \sin^2 \frac{\theta_1}{2}$$

d. i. die oben (Aufg. 35) aufgefundene Cardioide.

B. Gleichgewicht eines Punktes auf einer doppelt gekrümmten Linie.

Aufgabe 37. Auf einer doppelt gekrümmten Linie, welche bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem durch die Gleichungen $z = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ ihrer Vertical- und Horizontalprojection gegeben ist, befindet sich ein materieller Punkt, auf den beliebige Kräfte wirken.

I. Welches ist die Bedingung für das Gleichgewicht des Punktes? II. An welchen Stellen der Curve besteht es? III. Welchen Druck hat die Linie im Gleichgewichtszustande auszuhalten? IV. Wie ändern sich die gefundenen Resultate, wenn die Gleichungen der Curve in den unentwickelten Formen $F(x, z) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$ gegeben sind, oder wenn die beiden Gleichungen $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ derjenigen Flächen als gegeben vorliegen, deren Durchschnittslinie die Curve ist?

Lösung. I. Um wieder auf einen vollkommen freien Punkt zurückzukommen (vergl. Aufg. 12), denken wir uns den Widerstand, den die Curve leistet, durch eine Kraft N ersetzt, normal zu derselben und unter den Winkeln λ, μ, ν gegen die Achsen.

Ferner fassen wir sämmtliche Kräfte zu dreien, U, V, W, zusammen, welche parallel zu den Achsen wirken.

Dann ist der Punkt im Gleichgewichte, wenn

$$U + N\cos\lambda = 0.$$
$$V + N\cos\mu = 0.$$
$$W + N\cos\nu = 0.$$

Bezeichnet man nun mit φ, ψ und χ die Winkel, welche die Tangente mit den Achsen bildet, so ist bekanntlich ferner

$$\cos\lambda\cos\varphi + \cos\mu\cos\psi + \cos\nu\cos\chi = 0$$

und hierbei

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\psi = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\chi = \frac{dz}{ds},$$

wenn man unter ds das Bogenelement versteht.

Hieraus ergiebt sich als Bedingung des Gleichgewichts

$$1) \qquad U + V\frac{dy}{dx} + W\frac{dz}{dx} = 0.$$

II. Die Coordinaten x, y, z derjenigen Stellen, an welchen es stattfindet, folgen aus dieser Gleichung 1) und aus den beiden Gleichungen der Curve.

III. Der Druck, den die Linie im Gleichgewichtszustande erleidet, ist

$$2)\qquad D = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Die Richtung desselben ergiebt sich aus denen von U, V und W.

IV. Sind die Gleichungen der Linie in der Form $F(x, z) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$ gegeben, so ist bekanntlich

$$3)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}} \text{ und } \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x,z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,z)}{\partial z}}.$$

Das Uebrige bleibt ungeändert.

Liegen endlich die Flächengleichungen $F_1(x, y, z) = 0$ und $F_2(x, y, z) = 0$ als gegeben vor, so sind $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ bestimmt durch

$$4)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$5)\qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Nach Einsetzung der hieraus folgenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ in Gl. 1) ist dieser Fall auf den früheren zurückgeführt.

Aufgabe 38. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems ist ein Viertelkreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt der Coordinatenanfang und dessen Radius $= a$. In der xy-Ebene ein Halbkreis, welcher die x-Achse als Durchmesser, die y-Achse als Tangente und $\frac{a}{2}$ als Halbmesser besitzt. Ueber der ersten dieser beiden Linien steht eine Cylinderfläche parallel zur y-Achse; über der letzten eine andere, die mit der z-Achse gleiche Richtung hat. An welchen Stellen der Durchschnittslinie beider Flächen ist ein materieller Punkt im Gleichgewichte, wenn auf denselben drei Kräfte parallel zu den Coordinatenachsen wirken, welche proportional x, bezüglich y und z, sind und für die Einheiten dieser Coordinaten die Intensitäten A, bezüglich B und C, haben.

Lösung. Die allgemeine Bedingung für das Gleichgewicht ist nach Aufgabe 37 bekannt. In derselben ist für den vorliegenden Fall $U = Ax$, $V = By$, $W = Cz$, $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \sqrt{x(a - x)}$; sie geht daher in

$$2Ax + B(a - 2x) - 2Cx = 0$$

über. Folglich ist Gleichgewicht für

$$x = \frac{B}{2(B+C-A)} a,$$

was nur dann möglich ist, wenn

$$0 < \frac{B}{2(B+C-A)} < 1.$$

Ausserdem ist der Punkt natürlich auch noch an denjenigen beiden Stellen der Curve in Ruhe, welche in der xz-Ebene liegen.

Aufgabe 39. Eine Cylinderfläche, welche parallel zur z-Achse eines rechtwinkligen, räumlichen Coordinatensystems liegt und über einem Halbkreise steht, dessen einer Durchmesser die x-Achse und dessen eine Tangente die y-Achse ist, schneidet eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt und deren Halbmesser dem Cylinderdurchmesser gleichkommt. Auf der Schnittlinie beider Flächen befindet sich ein Punkt P, welcher dieselbe nicht verlassen kann und auf den die Kräfte U, V, W wirken, die parallel zu den Coordinatenachsen, proportional x, y und z sind und für $x = y = z = 1$ die Intensitäten A, B, C haben. Wo ist der Punkt im Gleichgewichte?

Lösung. Nach Anleitung der Auflösung der Aufgabe 37 findet man

$$x = \frac{a(C-B)}{2(A-B)}$$

als Abscisse der Gleichgewichtsstelle.

Dieselbe ist nur möglich, wenn A und C beide grösser als B, oder beide kleiner als B sind. Ausser an dieser Stelle ist auch noch in denjenigen beiden Curvenpunkten Gleichgewicht, welche in der xz-Ebene liegen.

Aufgabe 40. Wie Aufgabe 39; die parallel zur x-Achse wirkende Kraft U aber nicht gegeben, sondern so zu bestimmen, dass der Punkt P überall auf der Durchschnittslinie im Gleichgewichte ist.

Lösung. Es ergiebt sich

$$U = \tfrac{1}{2}([C-B]\, a + 2\,Bx)$$

auf dieselbe Weise, wie in der Lösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 41. Auf einen materiellen Punkt wirken die Kräfte $U = Lx$, $V = My$, $W = Nz$ (wobei L, M, N constant) parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Auf was für einer räumlichen Curve befindet er sich überall im Gleichgewichte, wenn die Horizontalprojection derselben ein Halbkreis ist, dessen Durchmesser

a und dessen Mittelpunkt in der x-Achse so liegt, dass die y-Achse tangirt?

Lösung. Für die Verticalprojection der gesuchten Gleichgewichtslinie findet man die Gleichung

$$(M - L)\, x^2 - N z^2 - M a x + Const = 0;$$

dieselbe ist also eine Curve zweiten Grades. Ihre specielle Art hängt von den Werthen der verschiedenen Constanten ab.

C. Gleichgewicht eines Punktes auf einer Fläche.

Aufgabe 42. Auf einen materiellen Punkt, der sich auf der Fläche $z = f(x,y)$ befindet, wirken beliebige Kräfte.

I. Welches sind die Bedingungen für das Gleichgewicht des Punktes? II. An welchen Stellen herrscht es? III. Welchen Druck hat die Fläche im Gleichgewichtszustande auszuhalten? IV. Wie lassen sich die erhaltenen Resultate auf den Fall übertragen, in welchem die Gleichung der Fläche in der unentwickelten Form $F(x,y,z) = 0$ gegeben ist?

Lösung. Denkt man sich, wie bei den Aufgaben 12 und 37, den Widerstand der Fläche ersetzt durch eine normale Kraft N unter den Winkeln λ, μ, ν, fasst man ferner die auf den Punkt wirkenden Kräfte zu dreien, U, V, W, zusammen, welche parallel zu den Coordinatenachsen wirken, so ist Gleichgewicht, wenn

$$U + N \cos\lambda = 0,$$
$$V + N \cos\mu = 0 \text{ und}$$
$$W + N \cos\nu = 0.$$

Hierzu kommen, weil N senkrecht zur Fläche stehen muss, die Gleichungen

$$\cos\lambda = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\nu = +\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Daraus ergeben sich als Bedingungen des Gleichgewichts

1) $$U + W\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

2) $$V + W\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

II. Die Coordinaten x, y, z derjenigen Stellen, an welchen es stattfindet, folgen aus diesen beiden Gleichungen und aus der der Fläche.

III. Der Druck, den die Fläche im Gleichgewichtszustande auszuhalten hat, ist

3) $$D = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Die Richtung desselben ergiebt sich aus denen von U, V und W.

IV. Ist die Gleichung der Fläche in der unentwickelten Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben, so ist bekanntlich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ und}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Setzt man dies in die Gleichungen 1) und 2) ein, so gehen diese über in

4) $$U\frac{\partial F}{\partial z} - W\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ und}$$

5) $$V\frac{\partial F}{\partial z} - W\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Das Uebrige bleibt ungeändert.

Aufgabe 43. An welcher Stelle einer Ebene, die auf allen drei Coordinatenachsen die Strecke a abschneidet, befindet sich ein Punkt von der Masse 1 im Gleichgewichte, wenn auf denselben, ausser seiner Schwere, parallel der x- und y-Achse zwei Kräfte wirken, die proportional x, bezüglich y, sind und für $x = y = 1$ beide die Intensität A haben?

Lösung. In den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen 1) und 2) der Aufgabe 42 ist für den hier vorliegenden Fall $U = Ax$, $V = By$, $W = -g$, $z = a - x - y$; dieselben lauten daher

$$Ax + g = 0 \text{ und } Ay + g = 0.$$

Aus ihnen und aus der Gleichung

$$x + y + z = a$$

der Fläche ergeben sich die Coordinaten der Gleichgewichtsstelle zu

$$x = y = -\frac{g}{A},$$

$$z = \frac{Aa + 2g}{A}.$$

Aufgabe 44. An welchen Stellen der Ellipsoidfläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ befindet sich ein materieller Punkt im Gleichgewichte, wenn auf denselben, parallel zu den Achsen, die constanten Kräfte A, B und C wirken?

Lösung. Man findet leicht, nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 42,

$$x = \pm \frac{Aa^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}}, \quad y = \pm \frac{Bb^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}},$$

$$Z = \pm \frac{Cc^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}},$$

als Coordinaten der Gleichgewichtsstellen.

Aufgabe 45. Auf einem aus den Halbachsen a, b und c construirten Ellipsoidquadranten ist ein Punkt beweglich, auf welchen zwei Gewichte wirken; das eine, Q, hängt an dem Punkte vertical abwärts, das andere, P, an einem Faden, der durch den Mittelpunkt der Fläche geht. Es soll bestimmt werden, an welchen Stellen der Punkt im Gleichgewichte ist I. bei beliebigem P und Q, II. wenn $P = Q$.

Lösung. I. Da hier $U = -P\frac{x}{r}$, $V = -P\frac{y}{r}$, $W = -\left(P\frac{z}{r} + Q\right)$ ist, wobei r den Radiusvector des Punktes bezeichnet, so hat man als Gleichgewichtsbedingungen, wenn man $\frac{c^2}{a^2} = A$, $\frac{c^2}{b^2} = B$ setzt,

$$-P\frac{x}{r} + \left(P\frac{z}{r} + Q\right)\frac{Ax}{z} = 0 \text{ und}$$

$$-P\frac{y}{r} + \left(P\frac{z}{r} + Q\right)\frac{By}{z} = 0$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

1) $\quad x = 0$, oder

2) $\quad (1 - A)\,Pz = AQr;$

aus der zweiten

3) $\quad y = 0$, oder

4) $$(1-B)\,Pz = BQr.$$

Als erste Combination von 1) bis 4) hat man also

5) $$x = 0 \text{ und } y = 0;$$

als zweite

6) $$x = 0 \text{ und}$$
$$(1-B)\,Pz = BQr,$$

aus welcher letzten Gleichung man leicht

7) $$y = b\sqrt{\frac{P^2 - \beta^4 Q^2}{P^2 + \beta^2 Q^2}}$$

ableitet, wenn man

$$\frac{c^2}{b^2 - c^2} = \beta^2$$

setzt. Zur Brauchbarkeit der Gleichung 7) gehört hierbei

$$P > \beta^2 Q.$$

Als dritte Combination ergiebt sich

$$(1-A)\,Pz = AQr \text{ und}$$

8) $$y = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert, wenn man die Abkürzung

$$\frac{c^2}{a^2 - c^2} = \alpha^2$$

benutzt,

9) $$x = a\sqrt{\frac{P^2 - \alpha^4 Q^2}{P^2 + \alpha^2 Q^2}}, \quad P > \alpha^2 Q.$$

Die letzte Combination

$$\frac{Pz}{Qr} = \frac{A}{1-A} = \frac{B}{1-B}$$

wäre nur für $A = B$ möglich.

II. Für $P = Q$ ist, nach 5) bis 9), der Punkt im Gleichgewichte, wenn

10) $$x = 0 \text{ und } y = 0, \text{ oder wenn}$$

11) $$x = 0 \text{ und } y = b\sqrt{1-\beta^2} = b\sqrt{\frac{b^2 - 2c^2}{b^2 - c^2}},$$

oder endlich, wenn

12) $$x = a\sqrt{1-\alpha^2} = a\sqrt{\frac{a^2 - 2c^2}{a^2 - c^2}} \text{ und } y = 0,$$

wozu

$$b > c\sqrt{2} \text{ und } a > c\sqrt{2}$$

gehört.

Aufgabe 46. Es sollen die Kräfte U und V bestimmt werden, welche parallel der x- und y Achse auf einen schweren Punkt von der

Masse 1 wirken müssen, wenn derselbe auf einer Ebene, die die Strecken a, b, c auf den Achsen abschneidet, überall im Gleichgewichte sein soll.

Lösung. In den allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht (Gl. 1 und 2 der Aufg. 42) ist jetzt $W = -g$, $z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$. Sie gehen daher über in

$$U + \frac{cg}{a} = 0 \text{ und } V + \frac{cg}{b} = 0,$$

liefern also

$$U = -\frac{c}{a}g \text{ und } V = -\frac{c}{b}g.$$

Es verhält sich mithin

$$U : V : W = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Aufgabe 47. Parallel zu den Achsen eines räumlichen, rechtwinkligen Coordinatensystems wirken auf einen Punkt immer die constanten Kräfte A, B und C. Man soll die Fläche bestimmen, auf welcher er überall im Gleichgewichte ist.

Lösung. Es ergiebt sich sehr leicht, dass die gesuchte Fläche eine Ebene ist, welche auf der x-, y- und z-Achse drei Strecken, a, b und c, abschneidet, die sich wie $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C}$ verhalten.

Aufgabe 48. Wie Aufgabe 47; die Kräfte aber nicht constant, sondern proportional x, bezüglich y und z; für $x = y = z = 1$ von den Intensitäten A, bezüglich B und C.

Lösung. Die Gleichgewichtsfläche ist ein Ellipsoid, dessen Achsen a, b und c sich wie $\frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{B}} : \frac{1}{\sqrt{C}}$ verhalten.

Capitel III.

Aufgaben über die Bestimmung des Schwerpunktes von Linien, Flächen und Körpern.

Erklärung. Bezeichnet man mit p das Gewicht der Volumeneinheit, mit V das Volumen eines Körpers, mit ξ, η und ζ die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Coordinaten seines Schwerpunktes, mit x, y und z die eines Körperelementes, so gelten nach der Theorie der Parallelkräfte bekanntlich die Momentengleichungen

$$1) \qquad \xi \int p\, d\, V = \int x\, p\, d\, V,$$

$$2) \qquad \eta \int p\, d\, V = \int y\, p\, d\, V,$$

$$3) \qquad \zeta \int p\, d\, V = \int z\, p\, d\, V.$$

Aus denselben folgen ξ, η und ζ.

Es können diese Gleichungen aber auch zur Bestimmung der Schwerpunkte von Flächen und Linien angewendet werden. Obgleich Letztere nämlich ohne materiellen Inhalt, also auch ohne Gewicht sind, so pflegt man doch von ihren Schwerpunkten zu reden. Man denkt sich nämlich auf dieselben Parallelkräfte wirkend und stellt sich deren Vertheilung als gleichförmig vor, wenn man von homogenen Flächen oder Linien redet, als ungleichförmig, wenn man das Gegentheil ausspricht.

Dass die in 1) bis 3) vorkommenden Integrale meist mehrfache sind, dass sich die Grenzen der Integrationen in jedem speciellen Falle aus der Natur des gerade vorliegenden Gebildes ergeben und dass sich die Formeln bedeutend vereinfachen, wenn p constant ist, braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden.

A. Bestimmung des Schwerpunktes ebener Linien.

α) Parallelcoordinaten.

Aufgabe 49. Eine ebene Curve hat, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten, die Gleichung $y=f(x)$; das Gewicht der Längeneinheit derselben ist p. Welche Werthe haben die Schwerpunktscoordinaten ξ und η, wenn die Linie von der Abscisse x_0 bis zur Abscisse x_1 gerechnet wird?

Lösung. Zu Folge der Gleichungen 1) und 2) der vorstehenden Erklärung hat man, wenn mit ds das Bogenelement bezeichnet wird,

$$\xi\int_{x=x_0}^{x=x_1} p\,ds=\int_{x=x_0}^{x=x_1} x\,p\,ds \text{ und}$$

$$\eta\int_{x=x_0}^{x=x_1} p\,ds=\int_{x=x_0}^{x=x_1} y\,p\,ds;$$

oder

$$G\xi=\int_{x_0}^{x_1} p\,x\sqrt{1+y'^2}\,dx \text{ und}$$

$$G\eta=\int_{x_0}^{x_1} p\,y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

wobei

$$G=\int_{x_0}^{x_1} p\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

das Gewicht der Linie bedeutet.

Ist p constant, so ist einfacher

$$s\xi=\int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{1+y'^2}\,dx \text{ und}$$

$$s\eta=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

in welchen Gleichungen $s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ die Bogenlänge der Curve vorstellt.

Aufgabe 50. Wo liegt der Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens, dessen Sehne $=2\sigma$ und dessen Radius $=a$ ist? Wo liegt er für den Halbkreis?

Lösung. Man legt das rechtwinklige Coordinatensystem natürlich so, dass die Halbirungslinie des Centriwinkels mit der y-Achse zusammenfällt und der Kreismittelpunkt Coordinatenanfang wird. Dann ist ξ, die Abscisse des Schwerpunktes, gleich Null. Die Ordinate η ergiebt sich aus der Gleichung

$$s\eta = \int_{-\sigma}^{+\sigma} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

in welcher s die Bogenlänge bedeutet, zu

$$\eta = \frac{2\sigma a}{s}.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Geraden, die den Centriwinkel halbirt, so, dass sich sein Abstand vom Kreismittelpunkte zum Radius verhält, wie die Länge der Sehne zu der des Bogens.

Für den Halbkreis ergiebt sich $\frac{2a}{\pi} = 0,6366a$ d. i. nahezu $\frac{7}{11}a$.

Aufgabe 51. Für die gemeine Kettenlinie,

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

sollen die Coordinaten ξ und η des von 0 bis x genommenen Bogens s I. berechnet, II. construirt werden; ferner soll man III. aus den in I. gefundenen Resultaten die Schwerpunktscoordinaten für einen beliebigen Kettenlinienbogen herleiten.

Lösung I. Die gesuchten Coordinaten sind durch die Gleichungen

$$s\xi = \int_0^x x\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad s\eta = \int_0^x y\sqrt{1+y'^2}\,dx \text{ und}$$

$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

bestimmt. In denselben ist $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$, also

$$1) \quad y' = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) \text{ und } 2) \sqrt{1+y'^2} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Daher hat man

$$s = \tfrac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) dx,$$

3) $$s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Ferner

$$s\xi = \tfrac{1}{2}\int_0^x x\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)dx, \text{ also}$$

4) $$s\xi = \tfrac{1}{2}k\left[x\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) - k\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)\right] + k^2.$$

Eben so

$$s\eta = \tfrac{1}{4}k\int_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx, \text{ mithin}$$

5) $$s\eta = \tfrac{1}{8}k^2\left[e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right] + \tfrac{1}{2}kx.$$

Statt 4) und 5) kann man einfacher schreiben

6) $$s\xi = sx - ky + k^2 = sx - k(y-k) \text{ und}$$

7) $$s\eta = \tfrac{1}{2}(sy + kx);$$

daher ergiebt sich

$$\xi = x - \frac{k\,(y-k)}{s} \text{ und}$$

$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(y + \frac{kx}{s}\right),$$

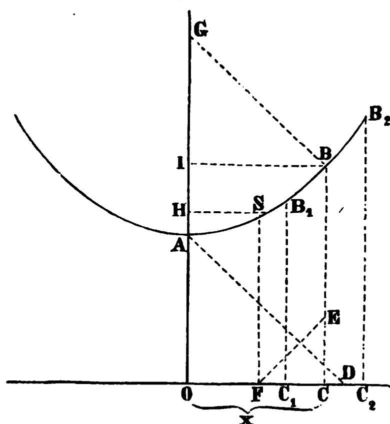
oder, wenn man *arc tan* y', also den Winkel, welchen die Curventangente mit der x-Achse bildet, durch τ bezeichnet und beachtet, dass (nach Gl. 1 und 3)

$$s = ky' = k \tan\tau \text{ ist,}$$

$$\xi = x - (y-k)\cot\tau \text{ und}$$

$$\eta = \tfrac{1}{2}(y + x\cot\tau).$$

Fig. 3.



II. Die Construction dieser beiden Coordinaten ergiebt sich sehr leicht, wenn man beachtet, dass $\tan\tau = y' = \frac{\sqrt{y^2 - k^2}}{k}$. Nimmt man nämlich (Fig. 3) $AD = BC = y$, so ist $\angle OAD = \angle\tau$. Wird also $BE = k$ genommen und EF senkrecht zu AD gezeichnet, so stellt OF das ξ des Schwerpunktes dar. Wird ferner BG parallel zu DA gezogen, so ist $OH = \tfrac{1}{2}\,OG$ das η.

Uebrigens kann das ξ auch dadurch erhalten werden, dass man die Curventangenten im Scheitel und im Punkte B zieht; es ist also die Abscisse des Bogenschwerpunktes gleich der des Durchschnittspunktes der Tangenten im Bogenanfange und Bogenende.

III. Bezeichnet man die Bögen AB_1 und AB_2 mit s_1 und s_2, die Coordinaten ihrer Schwerpunkte mit ξ_1, η_1, bezüglich ξ_2, η_2, und denkt sich dieselben nach I. bestimmt, so ergeben sich die des Bogens $B_1 B_2$, welche wieder ξ und η heissen mögen, aus den Momentengleichungen

$$s_1 \eta_1 + s \eta = s_2 \eta_2 \text{ und}$$
$$s_1 \xi_1 + s \xi = s_2 \xi_2$$

zu

$$\xi = \frac{s_2 \xi_2 - s_1 \xi_1}{s_2 - s_1} \text{ und } \eta = \frac{s_2 \eta_2 - s_1 \eta_1}{s_2 - s_1}.$$

Anmerkung. Zu der Gleichung 6) kann man auch auf folgendem Wege gelangen: Aus der Momentengleichung

$$s \xi = \int x\, ds$$

folgt

$$s \xi = x s - \int s\, dx = s x - \int k\, dy = s x - k y + Const.$$

Hierbei hat die Constante den Werth k^2, weil für $x = 0$, $s = 0$ und $y = k$ sein muss. Daher ist

$$s \xi = s x - k\, (y - k).$$

Auf ähnliche Weise lässt sich auch die Gleichung 7) herleiten.

Aufgabe 52. Welches sind die Schwerpunktscoordinaten eines vom Wälzungswinkel o bis zum Wälzungswinkel w gerechneten Cycloidenbogens? Welche Werthe haben dieselben für die ganze Cycloide?

Lösung. Für die vorliegende Curve ist bekanntlich:

$$x = a\,(w - \sin w),\; y = a\,(1 - \cos w),$$

wenn man mit a den Halbmesser des rollenden Kreises bezeichnet, die x-Achse mit der als Basis dienenden Geraden zusammenfallen lässt und die y-Achse durch den Anfangspunkt der Cycloide legt.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$dx = a\,(1 - \cos w)\, dw,\; dy = a \sin w\, dw,\; ds = 2 a \sin \tfrac{1}{2} w\, dw.$$

Mithin ergiebt sich

$$s = 8 a \sin^2 \tfrac{1}{4} w.$$

Ferner

$$s \xi = \int x\, ds = 2 a^2 \int_0^w (w - \sin w) \sin \tfrac{1}{2} w\, dw,$$

$$s \xi = 4 a^2 \left[\tfrac{4}{3} \sin^3 \tfrac{1}{2} w - (w - \sin w) \cos \tfrac{1}{2} w\right].$$

Eben so

$$s\eta = \int y\,ds = 2\,a^2 \int\limits_0^w (1-\cos w)\sin\tfrac{1}{2}w\,dw,$$

$$s\eta = 8\,a^2\left[\left(\tfrac{1}{3}\cos^2\tfrac{1}{2}w - 1\right)\cos\tfrac{1}{2}w + \tfrac{2}{3}\right].$$

Daher hat man

$$\xi = \frac{a}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}\sin^3\frac{1}{2}w - (w-\sin w)\cos\frac{1}{2}w}{\sin^2\frac{1}{4}w},$$

$$\eta = a\,\frac{\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{2}w - 1\right)\cos\frac{1}{2}w + \frac{2}{3}}{\sin^2\frac{1}{4}w},$$

in welchen Gleichungen noch $\frac{1}{2}(1-\cos\frac{1}{2}w)$ statt $\sin^2\frac{1}{4}w$ gesetzt werden kann.

Für die ganze Cycloide ($w = 2\pi$) ergiebt sich

$$\xi = a\pi,$$

was selbstverständlich ist, und

$$\eta = \tfrac{4}{3}a.$$

β) Polarcoordinaten.

Aufgabe 53. Eine ebene Curve hat, bezogen auf ein Polarcoordinatensystem, die Gleichung $r = f(\theta)$. Sie wird von der Anomalie θ_0 bis zur Anomalie θ_1 gerechnet. Man soll die Coordinaten ξ und η ihres Bogenschwerpunktes bestimmen, welche in Bezug auf ein solches rechtwinkliges System gemeint sind, dessen x-Achse die Achse des Polarsystems und dessen Coordinatenanfang der Pol ist.

Lösung. Bezeichnet man mit s_1 den zu θ_1, mit s_0 den zu θ_0 gehörigen Curvenbogen und denkt sich die Linie zunächst auf rechtwinklige Coordinaten bezogen, so sind ξ und η (vergl. Aufgabe 49) durch die beiden Gleichungen

$$(s_1 - s_0)\,\xi = \int\limits_{x=x_0}^{x=x_1} x\,ds \text{ und } (s_1 - s_0)\,\eta = \int\limits_{x=x_0}^{x=x_1} y\,ds$$

bestimmt; in Bezug auf Polarcoordinaten mithin durch die zwei, unmittelbar hieraus folgenden

$$(s_1 - s_0)\,\xi = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} r\sqrt{r^2 + r'^2}\cos\theta\,d\theta \text{ und}$$

$$(s_1 - s_0)\,\eta = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} r\sqrt{r^2 + r'^2}\sin\theta\,d\theta,$$

in denen

$$s_1 = \int_0^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta, \quad s_0 = \int_0^{\theta_0} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta,$$

$$r' = \frac{dr}{d\theta}$$

ist.

Aufgabe 54. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ und η des von o bis π gerechneten Bogens der Cardioide $(r = a(1 + \cos\theta))$ bestimmt werden.

Lösung. Die gesuchten Coordinaten folgen hier aus den Gleichungen

$$s\xi = \int_0^{\pi} r \cos\theta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta, \quad s\eta = \int_0^{\pi} r \sin\theta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta,$$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta,$$

wenn man $r = a(1 + \cos\theta)$, also $r' = -a \sin\theta$, mithin

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = 2a \cos \tfrac{1}{2}\theta$$

einführt. Es ergiebt sich hierbei sehr leicht

$$s = 4a.$$

Dann hat man weiter

$$4a\xi = 2a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta) \cos\theta \cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta$$

und hieraus ohne Schwierigkeit,

$$\xi = \tfrac{4}{5} a.$$

Endlich, zur Bestimmung von η,

$$4a\eta = 2a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta) \sin\theta \cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta,$$

also

$$\eta = \tfrac{4}{5} a.$$

Die beiden Schwerpunktscoordinaten sind mithin einander gleich.

Aufgabe 55. Wo liegt der Schwerpunkt des von o bis θ gerechneten Bogens der logarithmischen Spirale $r = ae^{\theta}$? Wo befindet sich der des ersten Quadranten derselben?

Lösung. Die allgemeinen Gleichungen, durch welche die Schwerpunktscoordinaten ξ und η bestimmt sind, lauten wie die drei ersten

in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe angeführten, nur mit dem Unterschiede, dass die Integrationsgrenzen o und θ, statt o und π, sind.

Da nun $r = a e^{\theta}$, also r' auch $= a e^{\theta}$, mithin $\sqrt{r^2 + r'^2} = a \sqrt{2}\, e^{\theta}$ ist, so ergiebt sich leicht

$$\int_0^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = a\sqrt{2}\,(e^{\theta} - 1)$$

und, bei Benutzung bekannter Reductionsformeln,

$$\int_0^{\theta} r \sqrt{r^2 + r'^2} \cos\theta\, d\theta = \frac{a^2\sqrt{2}}{5}\left[e^{2\theta}(2\cos\theta + \sin\theta) - 2\right],$$

$$\int_0^{\theta} r \sqrt{r^2 + r'^2} \sin\theta\, d\theta = \frac{a^2\sqrt{2}}{5}\left[e^{2\theta}(2\sin\theta - \cos\theta) + 1\right].$$

Daher hat man

$$\xi = \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{2\theta}(2\cos\theta + \sin\theta) - 2}{e^{\theta} - 1},$$

$$\eta = \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{2\theta}(2\sin\theta - \cos\theta) + 1}{e^{\theta} - 1}.$$

Für den ersten Quadranten wird hieraus einfacher, wegen $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\xi = \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{\pi} - 2}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1},$$

$$\eta = \frac{a}{5} \cdot \frac{2e^{\pi} + 1}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}.$$

B. Bestimmung des Schwerpunktes doppelt gekrümmter Linien.

Aufgabe 56. Eine doppelt gekrümmte Linie ist durch die Gleichungen $z = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ ihrer Vertical- und Horizontalprojection gegeben. Das Gewicht der Längeneinheit derselben werde mit p bezeichnet. Man sucht die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ für den von x_0 bis x_1 gerechneten Bogen.

Lösung. Versteht man unter P das Gewicht des ganzen Bogens und unter s seine Länge, so hat man, nach Dem, was in der „Erklärung" zu diesem Capitel gesagt worden ist,

$$P\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\, x\, ds, \quad P\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\, y\, ds, \quad P\zeta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\, z\, ds,$$

wobei $P = \int_{x=x_0}^{x=x_1} p\, ds$ und $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$

Wenn p constant ist, so gehen diese Gleichungen über in

$$s\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} x\, ds,\quad s\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} y\, ds,\quad s\zeta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} z\, ds,$$

in welchen

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Hierdurch sind die drei Coordinaten ξ, η und ζ vollständig bestimmt.

Aufgabe 57. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen, räumlichen Coordinatensystems ist die Curve $z = \frac{1}{2}x^2$ gezeichnet; in der xy-Ebene die andere $y = \frac{2}{3}\sqrt{2x^3}$. Ueber der Ersteren ist eine Cylinderfläche parallel der y-Achse, über der Letzteren eine parallel der z-Achse construirt. Wo liegt der Schwerpunkt der von o bis x gerechneten Durchschnittslinie dieser beiden Flächen?

Lösung. Bezeichnet man die Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes wie gewöhnlich mit ξ, η und ζ, so hat man zur Bestimmung derselben (vergl. die Lösung der vorigen Aufgabe)

$$s = \int_0^x \sqrt{1+2x+x^2}\, dx = \int_0^x (1+x)\, dx,$$

$$s\xi = \int_0^x (1+x)\, x\, dx,$$

$$s\eta = \frac{1}{3}\int_0^x \sqrt{8x^3}\,(1+x)\, dx,$$

$$s\zeta = \frac{1}{2}\int_0^x x^2 (1+x)\, dx,$$

Aus diesen Gleichungen folgt sehr leicht

$$s = \frac{1}{2}x\,(2+x),$$

$$s\xi = \frac{1}{6}x^2 (3+2x),\quad s\eta = \frac{2\sqrt{2}}{105}(14+10x)\, x^{\frac{5}{2}},$$

$$s\zeta = \frac{1}{24}(4+3x)\, x^3;$$

mithin

$$\xi = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{(3+2x)\,x}{2+x},\ \eta = \frac{8\sqrt{2}}{105} \cdot \frac{(7+5x)\,x^{\frac{3}{2}}}{2+x},$$

$$\zeta = \tfrac{1}{12} \cdot \frac{(4+3x)\,x^2}{2+x}.$$

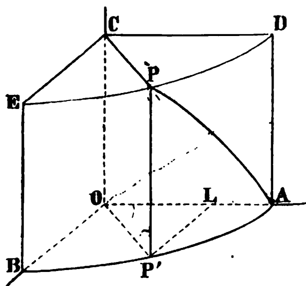
Aufgabe 58. Wo liegt der Schwerpunkt des Schraubenlinienbogens AP? Wie lassen sich seine Coordinaten ξ, η und ζ construiren?

Lösung. Die Schwerpunktscoordinaten sind durch die Gleichungen

$$s\xi = \int x\,ds,\ s\,\eta = \int y\,ds,\ s\,\zeta = \int z\,ds$$

bestimmt. Wenn nun a den Spindelradius, α den Steigungswinkel bedeutet und wenn man mit c den Ausdruck $a \tan \alpha$ (den Parameter der Schraubenlinie) bezeichnet, so lauten die Gleichungen der beiden Verticalprojectionen der Linie bekanntlich:

Fig. 4.



$$x = a \cos \frac{z}{c},\ y = a \sin \frac{z}{c}.$$

Ferner hat man für die Länge des Bogens AP

$$s = \frac{z}{\sin \alpha}.$$

Führt man dies in die obengenannten drei Momentengleichungen ein, so ergiebt sich, indem man zwischen den Grenzen o und z integrirt,

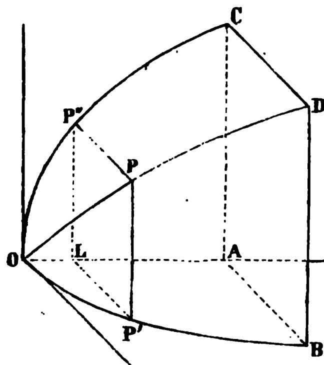
$$\xi = \frac{cy}{z},\ \eta = \frac{c\,(a-x)}{z},\ \zeta = \tfrac{1}{2}z.$$

Die letzte dieser drei Schwerpunktscoordinaten ist unmittelbar als Hälfte von z bekannt; die erste und zweite lassen sich leicht als vierte Proportionalen construiren.

Aufgabe 59. In der Verticalebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist eine gemeine Cycloide $OP''C$ gezeichnet, für welche $OA = b$ der Durchmesser des erzeugenden Kreises, CA die halbe Basis und O der Scheitel ist; in der Horizontalebene eine Parabel $OP'B$, deren Halbparameter $=2a$, deren Achse die x-Achse und deren Scheitel ebenfalls der Coordinatenanfang O. Ueber der ersten Linie ist eine Cylinderfläche parallel zur y-Achse, über der

zweiten eine andere in der Richtung der z-Achse construirt. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ der von o bis x gerechneten Durchschnittslinie beider Flächen bestimmt werden.

Fig. 5.



Lösung. Da die Gleichung der vorliegenden Parabel $y = \sqrt{4ax} = 2\sqrt{ax}$ ist, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Ferner ist, zu Folge einer bekannten Eigenschaft der Cycloide,

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{b-x}{x}}.$$

Mithin ergiebt sich

$$ds = \sqrt{\frac{a+b}{x}}\, dx,$$

daher

$$s = \int_{x=0}^{x=b} ds = 2\sqrt{(a+b)\, b},$$

$$s\xi = \int_{x=0}^{x=b} x\, ds = \tfrac{2}{3}\, b\sqrt{(a+b)\, b},$$

$$s\eta = \int_{x=0}^{x=b} y\, ds = 2\, b\sqrt{(a+b)\, a},$$

$$s\zeta = \int_{x=0}^{x=b} z\, ds = \sqrt{a+b} \int_0^b z \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Nun ist aber, wie sich leicht durch partielle Integration finden lässt,

$$\int z \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2z\sqrt{x} + \tfrac{4}{3}\sqrt{(b-x)^3},$$

also bei Einführung der Grenzen

$$\int_0^b z \frac{dx}{\sqrt{x}} = (\pi - \tfrac{4}{3})\, b\sqrt{b}.$$

Folglich

$$s\zeta = (\pi - \tfrac{4}{3})\, b\sqrt{(a+b)\, b}.$$

Die Schwerpunktscoordinaten sind mithin

$$\xi = \tfrac{1}{3} b = \tfrac{1}{3} OA; \quad \eta = \sqrt{ab} = \tfrac{1}{2} AB,$$

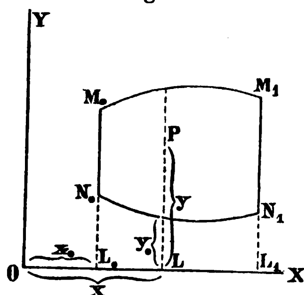
$$\zeta = (\pi - \tfrac{4}{3}) \frac{b}{2} = AC - \tfrac{2}{3} AO.$$

C. Bestimmung des Schwerpunktes ebener Flächen.

α) Parallelcoordinaten.

Aufgabe 60. Eine ebene Fläche $N_0 M_0 M_1 N_1$ ist oben und unten durch die Curven $M_0 M_1$ und $N_0 N_1$ begrenzt, deren Gleichungen $y_1 = f_1(x)$, bezüglich $y_0 = f_0(x)$, gegeben sind. Das Gewicht p der Flächeneinheit ist im Allgemeinen eine Function von x und y; ($p = \varphi(x, y)$). Welche Werthe haben die Coordinaten ξ und η des Schwerpunktes dieser Fläche? Wie lauten dieselben, wenn p constant ist?

Fig. 6.



Lösung. Wird das Gewicht der ganzen Fläche mit G bezeichnet, so hat man, nach Anleitung der zu Anfange dieses CaPitels gegebenen „Erklärung", die Gleichungen

$$G\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} x\, p\, dx\, dy,$$

$$G\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y\, p\, dx\, dy,$$

$$G = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} p\, dx\, dy,$$

in denen $y_0 = f_0(x)$, $y_1 = f_1(x)$, $p = \varphi(x,y)$ ist.

Aus denselben ergeben sich ξ und η sofort durch Division mit dem Werthe von G.

Wenn p constant ist und man den Inhalt der Fläche mit S bezeichnet, so gehen diese Gleichungen über in die einfacheren

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\, x\, dx,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\, dx,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\, dx,$$

aus welchen ξ und η ebenfalls durch Division folgen.

Zu diesen letzten Formeln gelangt man auch unmittelbar, wenn man sich die homogene Fläche parallel zur y-Achse in Streifen von der Höhe $y_1 - y_0$ und von der Breite dx zerlegt denkt.

Aufgabe 61. Für die gemeine Kettenlinie AB (Fig. 3), deren Gleichung $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ ist, sollen I. die Schwerpunkts-coordinaten ξ und η der von o bis x genommenen Fläche $S = OABC$ berechnet und construirt werden. Ferner soll man II. angeben, wie aus den gefundenen Werthen xon ξ und η am einfachsten die Coordinaten der Schwerpunkte der Flächen AJB und $C_1 B_1 B_2 C_2$ hergeleitet werden können.

Lösung. I. Die Gleichungen, welche die Schwerpunktslage bestimmen, lauten hier

$$S\xi = \int_0^x xy\,dx, \quad S\eta = \tfrac{1}{2}\int_0^x y^2\,dx, \quad S = \int_0^x y\,dx.$$

In denselben ist $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$; mithin ergiebt sich zunächst

$$S = \frac{k^2}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

oder, wenn man beachtet, dass der Bogen $AB = s$ den Werth $\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$ hat (siehe Aufgabe 51),

$$S = ks.$$

Eben so leicht findet man

$$S\xi = \frac{k^2}{2}\left[x\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) - k\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) + 2k\right],$$

oder, besser dargestellt,

$$S\xi = k\,[sx - k\,(y - k)].$$

Endlich

$$S\eta = \frac{k^2}{8}\left[\frac{k}{2}\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + 2x\right]$$

$$S\eta = \frac{k}{4}\left[sy + kx\right].$$

Mithin hat man für ξ und η die Werthe

$$\xi = \frac{sx - k\,(y-k)}{s},$$

$$\eta = \frac{sy + kx}{4s},$$

oder, wenn man mit τ den Winkel bezeichnet, welchen die im Punkte xy construirte Curventangente mit der x-Achse bildet,

$$\xi = x - (y-k)\cot\tau,$$

$$\eta = \tfrac{1}{4}\,(y + x\cot\tau).$$

Vergleicht man diese Resultate mit denen, welche in Aufgabe 51 unter I. für ξ und η gefunden worden sind, so sieht man, dass die Schwerpunktsabscisse des Kettenlinienbogens AB (Fig. 3) eben so gross ist, wie die der Kettenlinienfläche $OABC$ und dass die Ordinate des Schwerpunktes jenes Bogens dem Doppelten von der dieser Fläche gleichkommt.

Hiermit ist die Construction der Schwerpunktscoordinaten ξ und η durch die in Aufgabe 51 angegebene erledigt.

II. Wird der Inhalt der Fläche AJB mit S_1 bezeichnet und werden die Coordinaten ihres Schwerpunktes ξ_1 und η_1 genannt, so sind sie durch die Momentegleichungen

$$S\xi + S_1\xi_1 = (S + S_1)\frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}x^2 y \text{ und}$$

$$S\eta + S_1\eta_1 = (S + S_1)\frac{y}{2} = \tfrac{1}{2}xy^2$$

bestimmt.

Auf dieselbe Weise ergeben sich auch die Schwerpunktscoordinaten der Fläche $C_1B_1B_2C_2$ (Fig. 3), indem man dieselbe als Differenz der beiden Flächen OAB_2C_2 und $OAB_1'C_1$ auffasst.

Aufgabe 62. Wo liegt der Schwerpunkt derjenigen Fläche, welche von der ganzen Cissoide $\left(y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}} = \sqrt{\frac{x^3}{b - x}}\right)$ und ihrer Asymptote begrenzt wird?

Lösung. Die Fläche liegt bekanntlich symmetrisch gegen die x-Achse; es ist also blos das ξ des Schwerpunktes zu berechnen, weil $\eta = 0$ sein muss. Hierzu hat man die Gleichungen

$$S\xi = \int_0^b x\sqrt{\frac{x^3}{b-x}}\,dx \text{ und}$$

$$S = \int_0^b \sqrt{\frac{x^3}{b-x}}\, dx;$$

aus der ersten derselben folgt

$$S\xi = 5\int_0^b x^{\frac{3}{2}} \sqrt{b-x}\, dx.$$

Schreibt man hierfür

$$S\xi = 5\int_0^b \frac{x^{\frac{3}{2}}(b-x)}{\sqrt{b-x}} dx = 5b\int_0^b \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b-x}} dx - 5\int_0^b \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{b-x}} dx,$$

so hat man

$$S\xi = 5bS - 5S\xi,$$

mithin

$$\xi = \tfrac{5}{6} b,$$

als die gesuchte Schwerpunktsabscisse.

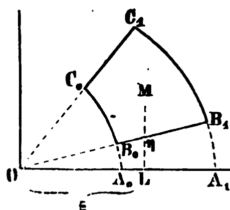
β) Polarcoordinaten.

Aufgabe 63. Eine Fläche $B_0 C_0 C_1 B_1$ ist durch zwei Curven $B_0 C_0$, $B_1 C_1$, deren Gleichungen

$$r_0 = f(\theta), \quad r_1 = \varphi(\theta)$$

sind und durch zwei Leitstrahlen $B_0 B_1$, $C_0 C_1$, welche zu den Anomalien $A_0 O B_0 = \theta_0$, $A_0 O C_0 = \theta_1$ gehören, begrenzt.

Fig. 7.



Es sollen die rechtwinkligen Coordinaten ξ und η des Schwerpunktes dieser Fläche bestimmt werden.

Lösung. Wird mit S der Inhalt der Fläche $B_0 C_0 C_1 B_1$ bezeichnet, so sind die gesuchten Coordinaten ξ und η durch die Momentegleichungen

$$S\xi = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr,$$

$$S\eta = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr,$$

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} r\, d\theta\, dr,$$

bestimmt, welche sich einfacher in den Formen

$$S\xi = \tfrac{1}{3}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_1^3 - r_0^3)\cos\theta\, d\theta,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_1^3 - r_0^3)\sin\theta\, d\theta,$$

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_1^2 - r_0^2)\, d\theta$$

geben lassen.

Aufgabe 64. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes, dessen Radius a und dessen Centriwinkel γ ist? Wo der des Halbkreises? Wo der des Quadranten?

Lösung. Der gesuchte Schwerpunkt liegt offenbar auf der Halbirungslinie des Centriwinkels. Zur Bestimmung seines Abstandes ξ vom Mittelpunkte hat man (nach der Lösung der vorigen Aufgabe), wenn das Kreiscentrum als Pol, die Winkelhalbirungslinie als Achse des Coordinatensystems genommen wird,

$$S\xi = \tfrac{1}{3}\int_{-\frac{1}{2}\gamma}^{+\frac{1}{2}\gamma} a^3\cos\theta\, d\theta,$$

$$S\xi = \tfrac{2}{3}a^3\sin\tfrac{1}{2}\gamma;$$

daher

$$\zeta = \tfrac{4}{3}a\,\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\gamma}.$$

Für den Halbkreis ist dies

$$\xi = \frac{4}{3\pi}\,a = 0{,}4244\,a;$$

für den Quadranten

$$\xi = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,a = 0{,}6002\,a.$$

Aufgabe 65. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ und η für diejenige Fläche berechnet werden, welche von dem, von o bis π gerechneten, Bogen der Cardioide $r_1 = a(1+\cos\theta)$, von dem zugehörigen Halbkreise des als Basis dieser Linie dienenden Kreises und von seinem verlängerten Durchmesser begrenzt wird.

Lösung. Da hier (vergl. die Lösung der Aufgabe 63) $\theta_0 = o$, $\theta_1 = \pi$, $r_0 = a\cos\theta$, $r_1 = a(1+\cos\theta)$ ist, so sind die zu ermittelnden Coordinaten ξ und η durch die Gleichungen

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos\theta)\, d\theta,$$

$$S\xi = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^\pi (1 + 3\cos\theta + 3\cos^2\theta) \cos\theta\, d\theta,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^\pi (1 + 3\cos\theta + 3\cos^2\theta) \sin\theta\, d\theta$$

bestimmt. Aus denselben folgt bei Ausführung der Integrationen

$$S = \tfrac{1}{2} \pi a^2,$$
$$S\xi = \tfrac{1}{2} \pi a^3,$$
$$S\eta = \tfrac{4}{3} a^3.$$

Mithin hat man

$$\xi = a \text{ und } \eta = \frac{8}{3\pi} a.$$

Aufgabe 66. Für den von o bis $\frac{\pi}{2}$ gerechneten Sector der Spirale des Archimedes ($r = a\theta$) sollen die Coordinaten ξ und η des Schwerpunktes bestimmt werden.

Lösung. Nimmt man den Pol des Systems, auf welches sich die Gleichung $r = a\theta$ bezieht, als Anfangspunkt des ξ, die Achse als seine Richtung und senkrecht dagegen das η, so hat man zur Bestimmung der beiden gesuchten Coordinaten die Gleichungen (vgl. Aufg. 63)

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\, d\theta,$$

$$S\xi = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^3 \cos\theta\, d\theta,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^3 \sin\theta\, d\theta.$$

Dieselben liefern

$$S = \tfrac{1}{48} \pi^3 a^2,$$
$$S\xi = \tfrac{1}{24} (\pi^3 - 24\pi + 48) a^3,$$
$$S\eta = \tfrac{1}{12} (3\pi^2 - 24) a^3.$$

Daher ist

$$\xi = \frac{2a(\pi^3 - 24\pi + 48)}{\pi^3},$$

$$\eta = \frac{4a(3\pi^2 - 24)}{\pi^3}.$$

Aufgabe 67. Welche Werthe haben die Coordinaten ξ und η des von o bis θ gerechneten Sectors der logarithmischen Spirale $r = a e^{\theta}$?

Lösung. Nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 63 hat man hier

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{\theta} e^{2\theta}\, d\theta,$$

$$S\xi = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{\theta} e^{3\theta} \cos\theta\, d\theta.$$

$$S\eta = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{\theta} e^{3\theta} \sin\theta\, d\theta.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt sofort

$$S = \tfrac{1}{4} a^2 (e^{2\theta} - 1);$$

die Integrale

$$J = \int e^{3\theta} \cos\theta\, d\theta \text{ und } J_1 = \int e^{3\theta} \sin\theta\, d\theta,$$

welche in den beiden letzten vorkommen, liefern

$$J = e^{3\theta} \sin\theta - 3 \int e^{3\theta} \sin\theta\, d\theta,$$
$$J_1 = - e^{3\theta} \cos\theta + 3 \int e^{3\theta} \cos\theta\, d\theta.$$

Dies ist so viel wie

$$J = e^{3\theta} \sin\theta - 3 J_1$$
$$J_1 = - e^{3\theta} \cos\theta + 3 J.$$

Mithin hat man

$$J = \tfrac{1}{10} e^{3\theta} (3\cos\theta + \sin\theta),$$
$$J_1 = \tfrac{1}{10} e^{3\theta} (3\sin\theta - \cos\theta),$$

also

$$S\xi = \tfrac{1}{30} a^3 [e^{3\theta} (3\cos\theta + \sin\theta) - 3],$$
$$S\eta = \tfrac{1}{30} a^3 [e^{3\theta} (3\sin\theta - \cos\theta) + 1];$$

folglich

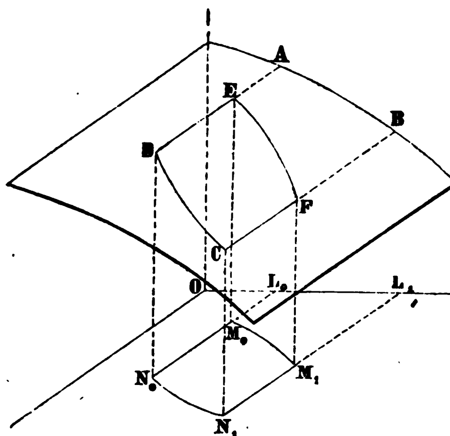
$$\zeta = \tfrac{2}{15} a \frac{e^{3\theta} (3\cos\theta + \sin\theta) - 3}{e^{2\theta} - 1} \text{ und}$$

$$\eta = \tfrac{2}{15} a \frac{e^{3\theta} (3\sin\theta - \cos\theta) + 1}{e^{2\theta} - 1}.$$

D. Bestimmung des Schwerpunktes von Cylinderflächen.

Aufgabe 68. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist eine homogene Cylinderfläche gegeben, welche parallel der y-Achse liegt und deren Leitlinie eine in der xz-Ebene gezeichnete Curve AB (Fig. 8) von der Gleichung $z = \varphi(x)$ ist. Aus derselben wird durch einen verticalen Cylinder, der über der Fläche $M_0 M_1 N_1 N_0$ steht, ein Stück $CDEF$ herausgebrochen. Die Curven $M_0 M_1$ und $N_0 N_1$ sind durch die Gleichungen $y_0 = f_0(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ bestimmt. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ der Fläche $CDEF$, deren Inhalt mit S bezeichnet werden möge, berechnet werden.

Fig. 8.



Lösung. Da z nur eine Function von x, nicht auch von y, ist, so kann man sich die Fläche $CDEF$ in streifenförmige Elemente zerlegt denken, welche die Länge $y_1 - y_0$ und die Breite ds haben, (wobei ds das Differential des Bogens AB bedeutet). Wird nun OL_0 mit x_0, OL_1 mit x_1 bezeichnet, so sind die gesuchten Schwerpunktscoordinaten durch die Gleichungen

$$S\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} x\,(y_1 - y_0)\,ds,$$

$$S\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} \tfrac{1}{2}(y_1 + y_0)(y_1 - y_0)\,ds = \tfrac{1}{2}\int_{x=x_0}^{x=x_1} (y_1^2 - y_0^2)\,ds,$$

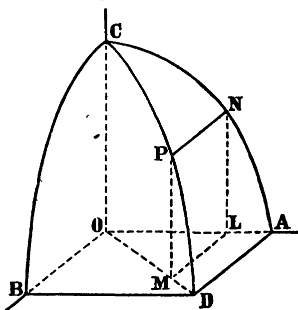
$$S\zeta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} z\,(y_1 - y_0)\,ds,$$

$$S = \int_{x=x_0}^{x=x_1} (y_1 - y_0)\,ds,$$

bestimmt, in welchen $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$ ist.

Aufgabe 69. Von einem Klostergewölbe, dessen Bogen CNA ein Viertelkreis ist, sind (Fig. 9) die Dimensionen $OA = OC = a$ und $AD = OB = b$ gegeben. Man sucht die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ des Gewölbflächentheiles $CNADPC$.

Fig. 9.



Lösung. ξ, η und ζ sind hier durch die Gleichungen

$$S\xi = \int_{x=0}^{x=a} xy\,ds, \quad S\eta = \tfrac{1}{2}\int_{x=0}^{x=a} y^2\,ds,$$

$$S\zeta = \int_{x=0}^{x=a} yz\,ds, \quad S = \int_{x=0}^{x=a} y\,ds$$

bestimmt, wenn mit S der Inhalt der Gewölbfläche $CNADPC$, mit ds das Differential des Bogens CN bezeichnet wird und wenn die Coordinaten von P, x, y und z genannt werden.

In diesen Gleichungen ist $y = \frac{b}{a}x$, $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, also $ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$. Daraus ergiebt sich leicht

$$S = ab.$$

Ferner, unter Anwendung der Substitution

$$\frac{x}{a} = \cos u,$$

$$S\xi = \tfrac{1}{4}a^2 b\pi.$$

Sodann folgt $S\eta = \frac{b}{2a}S\xi$, also

$$S\eta = \tfrac{1}{8}ab^2\pi.$$

Endlich

$$S\zeta = \tfrac{1}{2}a^2 b.$$

Die gesuchten Schwerpunktscoordinaten sind mithin

$$\xi = \tfrac{1}{4}a\pi, \quad \eta = \tfrac{1}{8}b\pi, \quad \zeta = \tfrac{1}{2}a.$$

Aufgabe 70. Die Wölblinie CNA des Gewölbes $CNADPC$ (Fig. 9) ist eine gemeine Kettenlinie, deren Scheitel in C liegt. Gegeben sind die Dimensionen $OA = a$, $AD = b$, $OC = c$ und der Parameter k, welcher mit a und c bekanntlich durch die Gleichung $c + k = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}\right)$ zusammenhängt. Es sollen die Coordinaten ξ, η und ζ, ξ_a, η_a und ζ_a der Schwerpunkte der Gewölbflächen CNP und CAD berechnet werden.

Lösung. Bezeichnet man den Inhalt der Fläche CNP mit S, die Länge des Bogens CN mit s, die Coordinaten von P mit x, y und z, so sind ξ, η und ζ, weil $y=\frac{b}{a}x$, $z=(c+k)-\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)$ ist, durch die Gleichungen

$$S=\frac{b}{2a}\int_0^x x\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)dx,$$

$$S\xi=\frac{b}{2a}\int_0^x x^2\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)dx,$$

$$S\eta=\frac{b^2}{4a^2}\int_0^x x^2\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)dx=\frac{b}{2a}S\xi,$$

$$S\zeta=\frac{b}{2a}\int_0^x\left[c+k-\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)\right]x\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)dx$$

bestimmt. Aus denselben folgt zunächst

$$S=\frac{bk}{2a}\left[x\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right)-k\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)+2k\right],$$

$$S\xi=\frac{bk}{2a}\left[\left(x^2+2k^2\right)\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right)-2kx\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)\right],$$

$$S\eta=\frac{b^2k}{4a^2}\left[\left(x^2+2k^2\right)\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right)-2kx\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)\right],$$

$$S\zeta=\frac{b}{2a}\left[k\left(c+k\right)\left\{x\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right)-k\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)+2k\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{k}{2}\left\{\frac{k}{2}\left(e^{2\frac{x}{k}}-e^{-2\frac{x}{k}}\right)x+x^2-\frac{k^2}{4}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)^2\right\}\right].$$

Hierfür kann man besser schreiben, wenn man beachtet, dass $s=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}\right)$ ist und dies sich leicht construiren lässt (vergl. Aufg. 51),

$$S=\frac{b}{a}\left[sx-k(c-z)\right],$$

$$S\xi=\frac{b}{a}\left[(x^2+2k^2)s-2kx(c+k-z)\right],$$

$$S\eta=\frac{b^2}{2a^2}\left[(x^2+2k^2)s-2kx(c+k-z)\right],$$

$$S\zeta = \frac{b}{2a}\Big[2(c+k)\{sx - k(c-z) + k^2\}$$
$$- \{s(c+k-z)x + \frac{k}{2}(x^2 - s^2)\}\Big].$$

Hieraus folgen ξ, η und ζ sogleich durch Division.

Nimmt man $x = a$, $z = 0$ und versteht unter s_a die Länge des Bogens CNA, unter S_a den Inhalt der Fläche CAD, so gehen die vorigen Gleichungen in

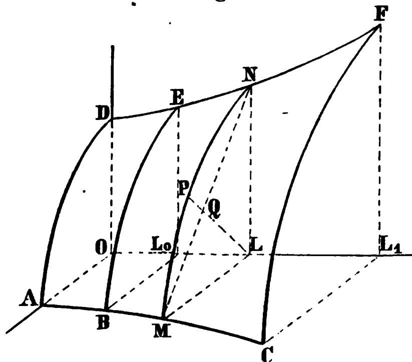
$$S_a = \frac{b}{a}(a\, s_a - k\, c) = b\left(s_a - \frac{k\, c}{a}\right),$$

u. s. w. über, aus denen dann wiederum die Schwerpunktscoordinaten ξ_a, η_a und ζ_a durch Division sich ergeben.

E. Bestimmung des Schwerpunktes von Umdrehungsflächen.

Aufgabe 71. Eine Curve DF, deren Gleichung $z = f(x)$ ist, dreht sich um die x-Achse eines rechtwinkligen Systems, bis sie aus der $x\,z$-Ebene in die $x\,y$-Ebene gelangt. Man verlangt die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes von dem dadurch entstandenen Quadranten der Umdrehungsfläche, wenn diese von $O\,L_0 = x_0$ bis $O\,L_1 = x_1$ gerechnet wird.

Fig. 10.



Lösung. Es sei LMN ein senkrechter Querschnitt an beliebiger Stelle, $O\,L = x$, $LN = z$, $EN = s$. Denkt man sich dann die Fläche in unendlich schmale Streifen von der Breite ds zerlegt, so ist ξ durch die Gleichung

$$S\xi = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} x\, z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

bestimmt, weil S den Werth

$$S = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

hat.

Ferner erhält man η und ζ, welche offenbar einander gleich sein müssen, aus der Bemerkung, dass der Schwerpunkt Q des Querschnittes LMN, als derjenige eines Kreisbogens, so liegen muss, dass sich

$$LQ : LP = \text{Sehne } MN : \text{Bogen } MPN$$

verhält. Es ergiebt sich nämlich hieraus die Gleichung

$$S\eta = S\zeta = \int_{x_0}^{x_1} z^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Aufgabe 72. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ der Fläche $ADFC$ (Fig. 10) bestimmt werden, unter der Voraussetzung, dass die rotirende Curve DF die gemeine Kettenlinie

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

ist.

Lösung. Wird mit S der Inhalt der Fläche $ADFC$, mit s die Länge des Kettenlinienbogens DF, mit x die von OL_1 bezeichnet, so hat man

$$S = \frac{\pi}{8} k \int_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx,$$

$$S\xi = \frac{\pi}{8} k \int_0^x x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx,$$

$$S\eta = S\zeta = \tfrac{1}{8} k^2 \int_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^3 dx.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$S = \frac{\pi}{8} k \left[\frac{k}{2}\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + 2x\right],$$

$$S\xi = \frac{\pi}{4}\left[x \frac{k^2}{4}\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + \frac{k}{2} x^2 - \frac{k^3}{8}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)^2\right],$$

$$S\eta = S\zeta = \tfrac{1}{24} k^3 \left[\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)^3 + 12\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)\right].$$

Beachtet man, dass $s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$ und dass sich dies leicht construiren lässt (vergl. Aufg. 51), so wird man hierfür besser schreiben

$$S = \tfrac{1}{4}\pi (sz + kx),$$

$$S\xi = \tfrac{1}{8}\pi (2sxz + k(x^2 - s^2)),$$

$$S\eta = S\zeta = s(\tfrac{1}{3}s^2 + k^2).$$

Mithin sind die zu berechnenden Schwerpunktscoordinaten

$$\xi=\frac{2sxz+k(x^2-s^2)}{2(sz+kx)},$$

$$\eta=\zeta=\frac{4s(s^2+3k^2)}{3\pi(sz+kx)}.$$

Aufgabe 73. Um die z-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems dreht sich die gemeine Kettenlinie $z=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)$ ein volles Mal. Wo liegt der Schwerpunkt des dadurch erzeugten Kettenconoids?

Lösung. Da die Fläche symmetrisch zur z-Achse ist, so muss der Schwerpunkt offenbar auf dieser liegen. Für seinen Abstand ζ vom Coordinatenanfange hat man, wenn mit S die Oberfläche des Conoids bezeichnet wird und unbestimmte Integration zur Anwendung kommt,

$$S\zeta=\frac{\pi k}{2}\int x\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx,$$

$$S\zeta=\frac{k\pi}{2}\left[\frac{k}{2}x\left(e^{2\frac{x}{k}}-e^{-2\frac{x}{k}}\right)+x^2-\frac{k^2}{4}\left(e^{2\frac{x}{k}}+e^{-2\frac{x}{k}}\right)\right]+Const.$$

Da für $x=0$ auch $S=0$ sein muss, so ergiebt sich

$$Const.=\frac{k\pi}{2}\left(\frac{k^2}{2}\right),$$

mithin

$$S\zeta=\frac{k\pi}{2}\left[\frac{k}{2}x\left(e^{2\frac{x}{k}}-e^{-2\frac{x}{k}}\right)+x^2-\frac{k^2}{4}\left(e^{2\frac{x}{k}}+e^{-2\frac{x}{k}}\right)+\frac{k^2}{2}\right],$$

oder besser, wenn unter s der Kettenlinienbogen verstanden wird,

$$S\zeta=\frac{\pi}{2}\left[2sxz-k(s^2-x^2)\right].$$

Für den Inhalt der Umdrehungsfläche findet man leicht

$$S=2\pi\left[sx-k(z-k)\right],$$

also ist

$$\zeta=\frac{1}{4}\frac{2sxz-k(s^2-x^2)}{sx-k(z-k)}$$

der Abstand des Schwerpunktes vom Coordinatenanfange.

Aufgabe 74. Eine in der xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems gezeichnete Curve von der Gleichung $y=f(x)$ dreht sich um die x-Achse um einen Winkel α. Es sollen die Coordinaten des Schwerpunktes der hierdurch erzeugten Rotationsfläche berechnet werden, unter der Voraussetzung, dass die Curve von der Abscisse x_0 bis zur Abscisse x_1 gerechnet wird.

Lösung. Man denke sich an der Stelle x einen Querschnitt parallel zur yz-Ebene und an der Stelle $x + dx$ noch einen. Zwischen denselben liegt dann ein Flächenelement dS, dessen Inhalt

$$1)\qquad dS = \alpha y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ist; der Schwerpunkt desselben möge Q heissen; seine drei Coordinaten QQ', QQ'' und QQ'''. Dann hat man zur Bestimmung von ξ, η und ζ die Gleichungen

$$S\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} QQ''' \,.\, dS,$$

$$S\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} QQ'' \,.\, dS,$$

$$S\zeta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} QQ' \,.\, dS.$$

Hierin ist dS nach Gleichung 1) bekannt. QQ''' ist der Abscisse x gleich. Für QQ'' und QQ' findet man leicht

$$QQ'' = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, y, \quad QQ' = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\, y,$$

wenn man den bekannten Satz für die Lage des Schwerpunktes eines Kreisbogens zur Anwendung bringt. (Aufg. 50).

Es ist daher

$$S\xi = \alpha \int_{x_0}^{x_1} x y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$S\eta = \sin\alpha \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$S\zeta = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

also $S\zeta = \tan\frac{\alpha}{2} \,.\, S\eta$.

Da zu diesen Gleichungen noch die aus 1) folgende

$$S = \alpha \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

tritt, so sind hiermit die gesuchten Schwerpunktscoordinaten vollständig bestimmt.

Aufgabe 75. Wo liegt der Schwerpunkt eines halben Kuge zweiecks, dessen Seiten zwei Meridiane sind, dessen Winkel α u dessen Kugelradius a ist? Wo liegt der des Octanten der Kugelfläch

Lösung. Legt man das Coordinatensystem so, dass die zu d Seiten des Zweiecks gehörige Kugelachse die x-Achse ist, der Kug mittelpunkt der Anfangspunkt der Abscissen, die Ebene der ein Zweiecksseite die xy-Ebene, so hat man zur Bestimmung der auf d ses System bezogenen Schwerpunktscoordinaten (nach Anleitung d Lösung der vorigen Aufgabe) die Gleichungen

$$S\xi = \alpha \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

$$S\eta = \sin\alpha \int_0^a (a^2 - x^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

$$S\zeta = \tan\frac{\alpha}{2} \cdot S\eta,$$

$$S = \alpha \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx.$$

Dieselben vereinfachen sich sogleich bedeutend und liefern, nach Au führung der Integrationen,

$$S\xi = \tfrac{1}{2} a^3 \alpha,\quad S\eta = \tfrac{1}{4} \pi a^3 \sin\alpha,\quad S\zeta = \tfrac{1}{2} \pi a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2},\quad S = a^2 \alpha,$$

welches letztere Resultat auch aus der elementaren Geometrie sch bekannt ist.

Man hat daher

$$\xi = \tfrac{1}{2} a,\quad \eta = \tfrac{1}{4} \pi a \frac{\sin\alpha}{\alpha},\quad \zeta = \tfrac{1}{2} \pi a \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha},$$

als Coordinaten des gesuchten Schwerpunktes.

Für den Octanten der Kugelfläche ergiebt sich hieraus

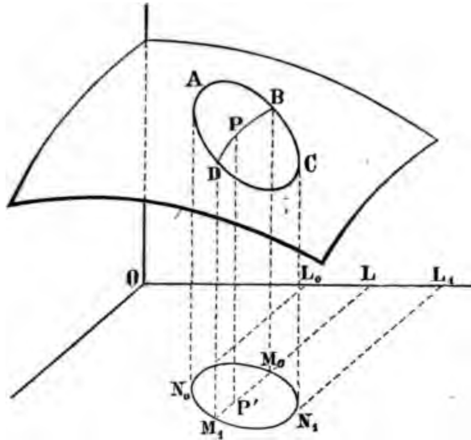
$$\xi = \eta = \zeta = \tfrac{1}{2} a.$$

F. Bestimmung des Schwerpunktes beliebiger Fläche

Aufgabe 76. In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Syste sind zwei Curven $N_0 M_0 N_1$ und $N_0 M_1 N_1$ gegeben, welche die Gleichu

gen $y_0 = f_0(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ haben. Sie werden von der Abscisse $OL_0 = x_0$ bis zur Abscisse $OL_1 = x_1$ gerechnet. Es sollen die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes von demjenigen Theile der homogenen Fläche $z = f(x, y)$ bestimmt werden, welcher senkrecht über dem Grundrisse $N_0 M_0 N_1 M_1$ liegt.

Fig. 11.



Lösung. Bezeichnet man die Coordinaten OL, LP', $P'P$ eines beliebigen Flächenpunktes P mit x, y, z und den Inhalt des über $N_0 M_0 N_1 M_1$ liegenden Flächentheils mit S, so hat man ξ, η und ζ durch die Gleichungen

$$1)\qquad S\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} R x \, dx \, dy,$$

$$2)\qquad S\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} R y \, dx \, dy,$$

$$3)\qquad S\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} R z \, dx \, dy,$$

$$4)\qquad S = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} R \, dx \, dy,$$

in denen zur Abkürzung

$$5)\qquad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = R$$

gesetzt ist. Es ergeben sich diese Gleichungen leicht aus Fig. 11, wenn man sich die Fläche in Elemente von zwei unendlich kleinen Dimensionen zerlegt denkt und beachtet, dass der Winkel ν zwischen Flächennormale und z-Achse durch

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

bekannt ist.

Aufgabe 77. Aus den Resultaten der vorhergehenden Aufgabe sollen die allgemeinen Formeln zur Bestimmung des Schwerpunktes von I. ebenen Flächen, II. Cylinderflächen hergeleitet werden; ferner III. die für den Schwerpunkt des Quadranten derjenigen Rotationsfläche, welche durch Drehung der Curve $y_1 = f(x)$, um die x-Achse, entsteht.

Lösung. I. Nimmt man die Ebene der Fläche als xy-Ebene, so ist $z = 0$ und $R = 1$. Setzt man dies in die Gleichungen 1) bis 4) der vorhergehenden Aufgabe ein und führt die Integration in Bezug auf y aus, so ergeben sich

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,(y_1 - y_0)\,dx,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\,dx,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,dx$$

als allgemeine Formeln für die Schwerpunktsbestimmung. Dies sind dieselben Resultate wie in der Lösung der Aufgabe 60.

II. Liegt die Cylinderfläche parallel zur y-Achse, so ist z eine Function von x allein, nicht auch von y. In Folge dessen gehen die Gleichungen 1) bis 4) der vorigen Aufgabe in

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,(y_1 - y_0)\,\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

$$S\eta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\,\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

$$S\zeta = \int_{x_0}^{x_1} z\,(y_1 - y_0)\,\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

über, was mit Aufgabe 68 übereinstimmt.

III. Da die Gleichung der vorgeschriebenenen Umdrehungsfläche $y_1^2 = y^2 + z^2$ ist, so hat man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y_1\,y_1'}{\sqrt{y_1^2 - y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{y_1^2 - y^2}},$$

mithin

$$R = y_1 \sqrt{\frac{1+y_1'^2}{y_1^2 - y^2}}.$$

Wird dies in die Gleichungen 1) bis 4) der vorigen Aufgabe eingesetzt, so ergiebt sich

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} x y_1 \sqrt{\frac{1+y_1'^2}{y_1^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$

$$S\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} y y_1 \sqrt{\frac{1+y_1'^2}{y_1^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$

$$S\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} y_1 \sqrt{1+y_1'^2}\, dx\, dy,$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} y_1 \sqrt{\frac{1+y_1'^2}{y_1^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

Beachtet man hier, dass y_1 und y_1' Functionen von x allein, nicht auch von y, sind, so ergeben sich aus diesen Gleichungen die einfacheren

$$S\xi = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} x y_1 \sqrt{1+y_1'^2}\, dx,$$

$$S\eta = S\zeta = \int_{x_0}^{x_1} y_1^2 \sqrt{1+y_1'^2}\, dx,$$

$$S = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} y_1 \sqrt{1+y_1'^2}\, dx,$$

welche mit den unter Aufgabe 71 gefundenen übereinstimmen, wenn man z statt y_1 schreibt.

Aufgabe 78. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist ein Kugeloctant gegeben, dessen Radius a ist und dessen Kugelmittelpunkt mit dem Anfange der Coordinaten zusammenfällt. In der xy-Ebene befindet sich ein Halbkreis über der x-Achse, welcher den Halbmesser $\frac{1}{2}a$ hat und von der y-Achse berührt wird. Man soll die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ desjenigen Theiles der Kugelfläche berechnen, der vertical über dem genannten Halbkreise liegt.

Lösung. Die gesuchten Coordinaten ξ, η und ζ sind hier durch die Gleichungen

$$S\xi=\int_0^a\int_0^{\sqrt{x(a-x)}} x\,R\,dx\,dy,$$

$$S\eta=\int_0^a\int_0^{\sqrt{x(a-x)}} y\,R\,dx\,dy,$$

$$S\zeta=\int_0^a\int_0^{\sqrt{x(a-a)}} z\,R\,dx\,dy,$$

$$S=\int_0^a\int_0^{\sqrt{x(a-x)}} R\,dx\,dy,$$

bestimmt, in denen R dieselbe Bedeutung hat, wie in der Auflösung der Aufgabe 76.

Da nun $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, also

$$R=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

ist, so hat man

$$S=a\int_0^a dx,\int_0^{\sqrt{x(a-x)}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Hieraus folgt, nach Ausführung der Integrationen,

1) $$S=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2,$$

(also der hübsche Satz, dass der Kugeloctant vermindert um die in Betracht gezogene Fläche dem Quadrate des Kugelradius gleich ist.)

Ferner hat man

$$S\xi=a\int_0^a\int_0^{\sqrt{x(a-x)}}\frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Kehrt man hier die Integrationsordnung um, so geht diese Gleichung über in

$$S\xi=a\int_0^{\frac{a}{2}}dy\int_{\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-y^2}}^{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-y^2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}}$$

woraus sich schliesslich

2) $$S\xi=\tfrac{1}{3}a^3$$

ergiebt.

Eben so hat man

$$S\eta = a\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

und hieraus

3) $$S\eta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) a^3 = \frac{3\pi - 8}{12} a^3.$$

Endlich

$$S\zeta = a\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} dy,$$

das ist

4) $$S\zeta = \tfrac{1}{8}\pi a^3.$$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) folgen nun die gesuchten Schwerpunktscoordinaten zu

$$\xi = \frac{2}{3(\pi-2)}a, \quad \eta = \frac{3\pi-8}{6(\pi-2)}a, \quad \zeta = \frac{\pi}{4(\pi-2)}a.$$

Aufgabe 79. In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist ein Ellipsenquadrant aus den Halbachsen a und b so construirt, dass die letzteren mit der x- und y-Achse zusammenfallen. Ueber demselben steht ein elliptisches Paraboloid, dessen Gleichung

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

ist. Man sucht die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ von demjenigen Theile dieser Fläche, welcher über jenem Ellipsenquadranten liegt.

Lösung. In den allgemeinen Gleichungen 1) bis 4) der Aufgabe 76, welche zur Schwerpunktsbestimmung der allgemeinen Fläche $z = f(x, y)$ dienen, ist hier

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

also

$$R = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}};$$

dieselben lauten daher

$$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

$$S\xi = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

$$S\eta = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

$$S\zeta = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} z\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Schafft man in der ersten dieser vier Gleichungen die elliptischen Grenzen mittelst der Substitutionen

$$x = a\varrho\cos\theta,\quad y = b\varrho\sin\theta$$

weg, so ergiebt sich sehr leicht

$$S = \tfrac{1}{6}\pi ab\,(2\sqrt{2}-1).$$

Unter Benutzung derselben Substitutionen liefert die zweite Gleichung

$$S\xi = a^2 b\int_0^1 \varrho^2\sqrt{1+\varrho^2}\,d\varrho;$$

dies giebt, bei Anwendung einer bekannten Reductionsformel,

$$S\xi = \tfrac{1}{8}a^2 b\,[3\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})].$$

Auf dieselbe Weise folgt aus der dritten der obigen vier Gleichungen

$$S\eta = ab^2\int_0^1 \varrho^2\sqrt{1+\varrho^2}\,d\varrho,$$

das ist so viel wie

$$S\eta = \frac{b}{a}\,S\xi,$$

mithin

$$S\eta = \tfrac{1}{8}ab^2[3\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})].$$

Endlich erhält man aus der vierten der genannten Gleichungen

$$S\zeta = \tfrac{1}{60}(1+\sqrt{2})\,\pi ab\,(a+b).$$

Daher sind

$$\xi = \frac{3a\,(3\sqrt{2} - l\,[1+\sqrt{2}])}{4\pi\,(2\sqrt{2}-1)},$$

$$\eta = \frac{3b\,(3\sqrt{2} - l\,[1+\sqrt{2}])}{4\pi\,(2\sqrt{2}-1)},$$

$$\zeta = \frac{(a+b)(1+\sqrt{2})}{10\,(2\sqrt{2}-1)},$$

die verlangten Schwerpunktscoordinaten.

G. Bestimmung des Schwerpunktes cylindrisch begrenzter Körper.

Aufgabe 80. Ueber den Curven $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ (Fig. 12), welche die Gleichungen

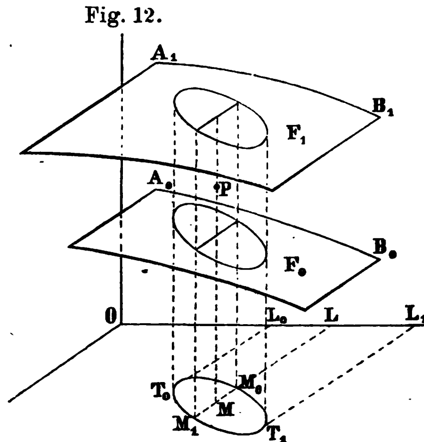
$$z_0 = \varphi_0(x) \text{ und } z_1 = \varphi_1(x)$$

haben, liegen zwei Cylinderflächen F_0 und F_1 parallel zur y-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems. In der xy-Ebene sind zwei Linien $T_0 M_0 T_1$ und $T_0 M_1 T_1$ gezeichnet, welche von der Abscisse x_0 bis zur Abscisse x_1 gerechnet werden und die Gleichungen

$$y_0 = f_0(x),\quad y_1 = f_1(x)$$

haben. Ueber denselben stehen Cylinderflächen parallel zur z-Achse. Man sucht die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ für denjenigen homogenen Körper, welcher von den genannten vier Flächen begrenzt wird.

Fig. 12.



Lösung. Denkt man sich den Körper in stabförmige Elemente, parallel zur z-Achse, zerlegt, bezeichnet sein Volumen mit V und die Coordinaten eines beliebigen Punktes desselben mit x, y, z, so hat man zur Bestimmung der gesuchten Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ die Gleichungen

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} x\,(z_1 - z_0)\,dx\,dy,$$

$$V\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y\,(z_1 - z_0)\,dx\,dy,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1^2 - z_0^2)\,dx\,dy,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\,dx\,dy.$$

Da nun z_1 und z_0 nicht von y, sondern nur von x, abhängen, so lässt sich die Integration in Bezug auf y ausführen. Die Formeln lauten also einfache

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,(y_1 - y_0)\,(z_1 - z_0)\,dx,$$

$$V\eta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\,(z_1 - z_0)\,dx,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,(z_1^2 - z_0^2)\,dx,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,(z_1 - z_0)\,dx;$$

zu denselben gelangt man noch schneller, wenn man von vorn herein den Körper in Schichten parallel zur yz-Ebene, statt in stabförmige Elemente, zerlegt.

Aufgabe 81. Von dem Gewölbe $CADO$ (Fig. 9), dessen Wölblinie CNA eine gemeine Parabel ist, deren Scheitel in C liegt, sind die Dimensionen $OA = a$, $AD = b$, $OC = h$ und der Parabelhalbparameter p gegeben. Man verlangt die Coordinaten ξ, η und ζ des Gewölbkörpers $CADO$.

Lösung. Werden die Coordinaten OL, LM und MP eines beliebigen Punktes P der Wölblinie CPD mit x, y_1 und z_1 bezeichnet, so sind ξ, η und ζ durch die Gleichungen

$$V\xi = \int_0^a x\,y_1\,z_1\,dx,\quad V\eta = \tfrac{1}{2}\int_0^a y_1^2\,z_1\,dx,\quad V\zeta = \tfrac{1}{2}\int_0^a y_1\,z_1^2\,dx,$$

$$V = \int_0^a y_1\,z_1\,dx.$$

bestimmt.

Hierbei ist $y_1 = \frac{b}{a} x$, $z_1 = h - \frac{x^2}{2p}$. Daher ergiebt sich, bei Einsetzung dieser Werthe sehr leicht

$$V = \tfrac{1}{8} \frac{a^3 b}{p},$$

oder, weil $h = \frac{a^2}{2p}$ ist,

$$V = \tfrac{1}{4} a b h.$$

Ferner hat man

$$V\xi = \frac{b}{a} \int_0^a x^2 \left(h - \frac{x^2}{2p}\right) dx$$

und daraus

$$V\xi = \tfrac{1}{15} \frac{a^4 b}{p},$$

oder, wenn man wieder h einführt,

$$V\xi = \tfrac{2}{15} a^2 b h.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$V\eta = \tfrac{1}{30} \frac{a^3 b^2}{p} = \tfrac{1}{15} a b^2 h;$$

endlich

$$V\zeta = \tfrac{1}{48} \frac{a^5 b}{p^2} = \tfrac{1}{12} a b h^2.$$

Die verlangten Schwerpunktscoordinaten sind mithin

$$\xi = \tfrac{8}{15} a, \quad \eta = \tfrac{4}{15} b, \quad \zeta = \tfrac{1}{3} h.$$

Aufgabe 82. Es sollen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ des homogenen Gewölbkörpers $CADO = V$ (Fig. 9) bestimmt werden, dessen Wölblinie CNA eine gemeine Kettenlinie ist, deren Scheitel in C liegt und deren Parameter k man kennt. Gegeben sind, ausser k, die Dimensionen $OA = a$, $AD = b$, $OC = h$, also auch $h + k$, welches c heissen möge.

Lösung. Bezeichnet man die Länge des Bogens CA, welche sich bekanntlich sehr leicht construiren lässt (vergl. Aufgabe 51) mit s und beachtet, dass

$$\frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}\right) = s \text{ und } \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}\right) = c$$

ist, so findet man

$$V = \frac{b}{a} \left\{ \tfrac{1}{2} a^2 c - k(as - hk) \right\},$$

$$V\xi = \frac{b}{a} \left\{ \tfrac{1}{3} a^3 c - k\left(a^2 s - 2k\{ac - ks\}\right) \right\},$$

$$V\eta = \frac{b}{2a} V\xi,$$

$$V\zeta = \frac{b}{4a}\left\{c(a^2c - 4k[2as - kc]) - k(a[cs + ak] - \tfrac{1}{2}k[c^2 + a^2 - \tfrac{1}{2}k^2])\right\}.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgen die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ sogleich durch Division.

Aufgabe 83. Ein gerades Prisma von der Höhe b hat ein rechtwinkliges Dreieck zur Basis, dessen Katheten a und c sind. Die Dichtigkeit des Körpers wächst proportional dem Abstande von derjenigen Seitenfläche, welche von den Kanten b und c gebildet wird und hat im Abstande 1 von derselben den Werth k. Es sollen die Coordinaten des Schwerpunktes des Prisma's berechnet werden.

Lösung. Legt man das Coordinatensystem so, dass die Kante a mit der x-Achse, die Kante b mit der y-Achse, c mit der z-Achse zusammenfällt und bezeichnet mit G das Gewicht des Körpers, mit ξ, η und ζ, wie gewöhnlich, die Schwerpunktscoordinaten, so hat man zur Bestimmung von ξ die Gleichungen

$$G\xi = \frac{kbc}{a}\int_0^a x^2(a-x)\,dx \text{ und}$$

$$G = \frac{kbc}{a}\int_0^a x(a-x)\,dx.$$

Aus denselben folgt

$$G\xi = \tfrac{1}{12}ka^3bc,$$
$$G = \tfrac{1}{6}ka^2bc, \text{ mithin}$$
$$\xi = \tfrac{1}{2}a.$$

Ferner hat man, ohne Rechnung,

$$\eta = \tfrac{1}{2}b.$$

Endlich erhält man ζ aus der Gleichung

$$G\zeta = \frac{kbc^2}{2a^2}\int_0^a (a-x)^2 x\,dx$$

Dieselbe liefert

$$G\zeta = \tfrac{1}{24}ka^2bc^2;$$

daher ist

$$\zeta = \tfrac{1}{4}c$$

das z des Schwerpunktes.

H. Bestimmung des Schwerpunktes von Umdrehungskörpern.

Aufgabe 84. Die Curve BC (Fig. 10), deren Gleichung $y_1 = f(x)$ gegeben ist und welche von der Abscisse $OL_0 = a_0$ bis zur Abscisse $OL_1 = a_1$ gerechnet wird, erzeugt einen Rotationskörperquadranten, indem sie sich um die x-Achse dreht. Welches sind die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes dieses Körpers?

Lösung. Denkt man sich das Volumen V in stabförmige Elemente, parallel zur z-Achse, zerlegt, und bezeichnet die Coordinaten eines beliebigen Oberflächenpunktes P mit x, y, z, so hat man ξ, η und ζ zunächst durch die Gleichungen

$$V\xi = \int_{a_0}^{a_1}\int_0^{y_1} x\sqrt{y_1^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

$$V\eta = V\zeta = \int_{a_0}^{a_1}\int_0^{y_1} y\sqrt{y_1^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

$$V = \int_{a_0}^{a_1}\int_0^{y_1} \sqrt{y_1^2 - y^2}\,dx\,dy$$

Dieselben gehen, da sich die Integration in Bezug auf y ausführen lässt, über in

$$V\xi = \frac{\pi}{4}\int_{a_0}^{a_1} x\,y_1^2\,dx,$$

$$V\eta = V\zeta = \frac{1}{3}\int_{a_0}^{a_1} y_1^3\,dx,$$

$$V = \frac{\pi}{4}\int_{a_0}^{a_1} y_1^2\,dx.$$

Hieraus folgen ξ, η und ζ durch Division.

Aufgabe 85. Es soll, unter Anwendung rechtwinkliger Coordinaten, die Lage des Schwerpunktes von dem Volumen eines Kugeloctanten, dessen Radius a ist, berechnet werden.

Lösung. Wird der Kugelmittelpunkt als Coordinatenanfang genommen und das Volumen des Octanten mit V bezeichnet, so sind die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ durch die Gleichungen

$$V\xi = \frac{\pi}{4}\int_0^a x\,(a^2 - x^2)\,dx,$$

$$V\eta = V\zeta = \tfrac{1}{3}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}^{\,3}\,dx$$

bestimmt, in welchen bekanntlich

$$V = \frac{\pi}{6}\,a^3$$

ist. Aus der ersten dieser Formeln ergiebt sich sogleich

$$V\xi = \frac{\pi}{16}\,a^4;$$

die zweite derselben liefert, unter Benutzung bekannter Reductionsformeln,

$$V\eta = V\zeta = \frac{\pi}{16}\,a^4.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind daher

$$\xi = \eta = \zeta = \tfrac{3}{8}\,a.$$

Aufgabe 86. Ein homogener Körper ist aus einer Halbkugel und einem geraden Kreiskegel so zusammengesetzt, dass die Basis der Halbkugel in der ihr congruenten des Kegels liegt. Der Kugelradius ist c, die Kegelhöhe a. Man soll I. bestimmen, wo der Schwerpunkt dieses Körpers liegt, II. wie sich Kegelhöhe und Kugelradius verhalten müssen, wenn immer Gleichgewicht stattfinden soll, mit welchem Punkte der Halbkugelfläche man den Körper auch auf eine horizontale Ebene aufsetzen mag.

Lösung. I. Der Schwerpunkt liegt natürlich auf der Symmetrieachse. Nimmt man diese als x-Achse und den Mittelpunkt der Kegelbasis als Coordinatenanfang, so enthält die Momentegleichung

$$\tfrac{1}{3}\pi c^2 (a + 2c)\,\xi = \frac{\pi c^2}{a^2}\int_0^a (a - x)^2\,x\,dx - \pi\int_0^c (c^2 - x^2)\,x\,dx$$

die Bestimmung des Schwerpunktabstandes ξ von der Kegelgrundfläche.

Dieselbe liefert

$$\xi = \frac{a^2 - 3c^2}{4\,(a + 2c)},$$

was sowohl positiv, als auch negativ, sein kann.

II. Soll der Körper immer im Gleichgewichte sein, mit welchem Punkte der Kugeloberfläche man ihn auch aufsetzen mag, so muss

sein Schwerpunkt offenbar mit dem Kugelmittelpunkte zusammenfallen; es muss also

$$a = c\sqrt{3}$$

sein, der Winkel, welchen die Kegelseite mit der Kegelbasis bildet, daher 60 Grad.

Aufgabe 87. Es soll der Volumenschwerpunkt desjenigen Körpers bestimmt werden, welcher entsteht, wenn sich die Kettenlinie DF (Fig. 10), deren Gleichung $z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ ist, ein volles Mal um die x-Achse dreht.

Lösung. Da der Schwerpunkt auf der x-Achse liegt, so braucht nur sein ξ berechnet zu werden.

Für dasselbe hat man

$$V\xi = \frac{\pi}{4}\, k^2 \int_0^x x\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx \text{ und}$$

$$V = \frac{\pi}{4}\, k^2 \int_0^x \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)^2 dx.$$

Hieraus folgt, wenn man mit s die Länge desjenigen Kettenlinienbogens bezeichnet, welcher zu der Ordinate z gehört,

$$V\xi = \tfrac{1}{4}\,\pi k\,(2sxz + k\,[x^2 - s^2]) \text{ und}$$
$$V = \tfrac{1}{2}\,\pi k\,(sz + kx).$$

Der gesuchte Schwerpunktsabstand ist mithin

$$\xi = \frac{2sxz + k\,[x^2 - s^2]}{2\,(sz + kx)}.$$

(Vergl. Aufgabe 72.)

Aufgabe 88. Wie Aufgabe 87, nur dreht sich die Kettenlinie um die z-Achse, statt um die x-Achse.

Lösung. Hier ist blos der Abstand ζ des Schwerpunktes von der xy-Ebene zu berechnen. Dazu hat man

$$V\zeta = \tfrac{1}{4}\,\pi k \int_0^x x^2\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) dx.$$

Dies liefert

$$V\zeta = \tfrac{1}{4}\,\pi\,(x^2\,[2z^2 - k^2] - ks\,[2xz - ks]).$$

Ferner findet man leicht

$$V = \pi\,(x^2 z - 2k\,[sx - k\,(z - k)]);$$

also ist

$$\zeta = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{x^2\,(2z^2 - k^2) - ks\,(2xz - ks)}{x^2 z - 2k\,[sx - k\,(z - k)]}.$$

I. Bestimmung des Schwerpunktes beliebiger K

α) Parallelcoordinaten.

Aufgabe 89. Ueber den Curven $T_0 M_0 T_1$ und $T_0 M_1 T_1$ (F welche die Gleichungen

$$y_0 = \varphi_0(x) \text{ und } y_1 = \varphi_1(x)$$

haben und von der Abscisse $O L_0 = x_0$ bis zu der Abscisse O gerechnet werden, stehen Cylinderflächen parallel zur z-Achse selben werden von zwei Flächen F_0 und F_1 durchschnitten, der chungen $z_0 = f_0(x,y)$, bezüglich $z_1 = f_1(x,y)$, sind. Es sol Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ desjenigen Körpers e werden, welcher über dem Grundrisse $T_0 M_0 T_1 M_1$ liegt, von d chen F_0 und F_1 aber oben und unten begrenzt wird. Das Ge der Volumeneinheit des Körpers soll I. als veränderlich, II. stant vorausgesetzt werden.

Lösung. I. Wird das Gewicht des Körpers mit P bez so sind ξ, η und ζ durch die vier Gleichungen

$$P\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\, x\, dx\, dy\, dz,$$

$$P\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\, y\, dx\, dy\, dz,$$

$$P\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\, z\, dx\, dy\, dz,$$

$$P = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\, dx\, dy\, dz$$

bestimmt.

II. Ist p constant, so gehen diese Gleichungen in

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} x\, dx\, dy\, dz,$$

$$V\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} y\, dx\, dy\, dz,$$

$$V\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} z\, dx\, ay\, dz,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} dx\, dy\, dz$$

über, in denen V selbstverständlich das Volumen des Körpers bedeutet. Hier ist die Integration in Bezug auf z ausführbar; die Gleichungen lauten daher einfacher

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} x (z_1 - z_0)\, dx\, dy,$$

$$V\eta = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} y (z_1 - z_0)\, dx\, dy,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y_1} (z_1^2 - z_0^2)\, dx\, dy,$$

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\, dx\, dy.$$

Zu diesen Formeln gelangt man schneller, wenn man sich den homogenen Körper von vorn herein in stabförmige Elemente zerlegt denkt.

Aufgabe 90. Aus den vier letzten Gleichungen der Lösung der vorigen Aufgabe sollen die allgemeinen Formeln der Schwerpunktsbestimmung für den Fall hergeleitet werden, dass F_0 und F_1 Cylinderflächen sind, welche parallel zur y-Achse liegen.

Lösung. Unter Beachtung des Umstandes, dass z_0 und z_1 in dem vorgeschriebenen Falle nur noch Functionen von x, nicht mehr solche von y, sind, ergeben sich sofort die vier Gleichungen, welche den Schluss der Lösung der Aufgabe 80 bilden.

Aufgabe 91. Ein schiefabgeschnittenes, gerades, vierseitiges Prisma hat als Grundfläche ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten $AB = a$ und $AD = b$ sind. Die drei Seitenkanten, welche in A, B und C senkrecht zur Grundfläche stehen, haben die Längen c, c_1, c_2; die vierte, durch dieselben bestimmte, ist gleich c_3. Man sucht die Lage des Schwerpunktes des Körpers.

Lösung. Legt man das Coordinatensystem so, dass AB die x-Achse, AD die y Achse und c die z-Achse ist, und bezeichnet mit V das Volumen des schiefabgeschnittenen Prisma's, mit x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes seiner Deckfläche, so hat man die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ durch die Gleichungen

$$P\zeta = k\int_0^a\int_0^{a-x}\int_0^{a-x-y}(x^2+y^2+z^2)\,z\,dx\,dy\,dz,$$

$$P = k\int_0^a\int_0^{a-x}\int_0^{a-x-y}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

bestimmt; die erste derselben liefert

$$P\zeta = \tfrac{1}{180}ka^6;$$

die zweite

$$P = \tfrac{1}{20}ka^5,$$

was nach Aufgabe 6 bereits bekannt ist. Der Schwerpunkt liegt also in der Höhe

$$\zeta = \tfrac{1}{9}a.$$

β) Polarcoordinaten.

Aufgabe 94. Es sollen, mit Benutzung der unter Aufgabe 89 gefundenen Resultate, die allgemeinen Formeln für die Schwerpunktsbestimmung solcher Körper hergeleitet werden, welche auf Polarcoordinaten bezogen sind; und zwar I. für den Fall veränderlicher, II. für den constanter Dichtigkeit.

Lösung. I. Bezeichnet man mit r den Radiusvector eines beliebigen Punktes P des Körpers, welchem die rechtwinkligen Coordinaten x, y und z zukommen, mit ψ den Winkel zwischen Leitstrahl und x-Achse, mit w denjenigen, unter welchem die durch r und die x-Achse gelegte Ebene gegen die xy-Ebene geneigt ist, so gelten bekanntlich die Beziehungen

$$x = r\cos\psi,\quad y = r\sin\psi\cos w,\quad z = r\sin\varphi\sin w,$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\sin\psi\,d\psi\,dw\,dr.$$

In Folge dessen lauten die allgemeinen Gleichungen zur Schwerpunkts bestimmung (nach Aufgabe 89 I)

$$P\xi = \int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p r^3\cos\psi\sin\psi\,dw\,d\psi\,dr$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p r^3\sin 2\psi\,dw\,d\psi\,dr,$$

$$P\eta = \int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p r^3\sin^2\psi\cos w\,dw\,d\psi\,dr,$$

$$P\zeta = \int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p\, r^3 \sin^2\psi \sin w \, dw \, d\psi \, dr,$$

$$P = \int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\int_{r_0}^{r_1} p\, r^2 \sin\psi \, dw \, d\psi \, dr;$$

in denselben haben P und p dieselbe Bedeutung wie in Aufgabe 89; die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Natur der Körperbegrenzungen.

II. Wenn p constant ist, sind die Gleichungen einfacher

$$V\xi = \tfrac{1}{4}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4) \cos\psi \sin\psi \, dw \, d\psi$$

$$= \tfrac{1}{8}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4) \sin 2\psi \, dw \, d\psi,$$

$$V\eta = \tfrac{1}{4}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4) \sin^2\psi \cos w \, dw \, d\psi,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{4}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^4 - r_0^4) \sin^2\psi \sin w \, dw \, d\psi,$$

$$V = \tfrac{1}{3}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1} (r_1^3 - r_0^3) \sin\psi \, dw \, d\psi.$$

Aufgabe 95. Ein homogener Kugelsector hat den Radius a und den Centriwinkel 2γ. Man soll (unter Anwendung von Polarcoordinaten) die Lage seines Schwerpunktes ermitteln.

Lösung. Der gesuchte Schwerpunkt liegt auf der Mittellinie des Sectors. Nimmt man diese als x-Achse und den Kugelmittelpunkt als Pol, so ist das ξ des Schwerpunktes durch die beiden Gleichungen

$$V\xi = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\gamma} a^4 \sin\psi \cos\psi \, dw \, d\psi,$$

$$V = \tfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\gamma} a^3 \sin\psi \, dw \, d\psi$$

bestimmt; aus diesen folgt

$$V\xi = \tfrac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\gamma,$$

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \sin^2\frac{\gamma}{2};$$

mithin ist

$$\zeta = \tfrac{3}{4}\, a \cos^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Für die Halbkugel z. B. hat man

$$\xi = \tfrac{3}{8}\, a.$$

Aufgabe 96. Die beiden Meridianebenen eines homogenen halben Kugelkeiles schliessen den Flächenwinkel γ ein. Der Kugelradius ist gleich a. Es wird die Lage des Schwerpunktes gesucht.

Lösung. Nimmt man die eine Meridianebene als xz-Ebene, die mit der andern gebildete Durchschnittsgerade als x-Achse, die Aequatorebene als yz-Ebene, so hat man die Bestimmung der Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ durch die vier Gleichungen

$$V\xi = \tfrac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos\psi \sin\psi \, dw \, d\psi,$$

$$V\eta = \tfrac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2\psi \cos w \, dw \, d\psi,$$

$$V\zeta = \tfrac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2\psi \sin w \, dw \, d\psi,$$

$$V = \tfrac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin\psi \, dw \, d\psi.$$

Diese liefern

$$V\xi = \tfrac{1}{8} a^4 \gamma, \quad V\eta = \frac{\pi}{16} a^4 (1-\cos\gamma) = \frac{\pi}{8} a^4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad V\zeta = \frac{\pi}{16} a^4 \sin\gamma.$$

$$V = \tfrac{1}{3} a^3 \gamma,$$

welches Letztere auch aus der elementaren Geometrie bekannt ist. Man hat daher

$$\xi = \tfrac{3}{8} a, \quad \eta = \tfrac{3}{8} \pi a \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\gamma}, \quad \zeta = \frac{3}{16} \pi a \frac{\sin\gamma}{\gamma}.$$

Für den Kugeloctanten z. B. giebt dies

$$\xi = \eta = \zeta = \tfrac{3}{8} a,$$

Was mit der Lösung der Aufgabe 85 übereinstimmt.

Capitel IV.

Aufgaben über das Gleichgewicht von beliebigen Kräften an einem Systeme von Punkten.

Erklärung. Beliebig viele, an einem Punktesysteme beliebig wirkende Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sind im Gleichgewichte, wenn sie dasselbe weder zu verschieben, noch zu drehen vermögen. Bezieht man das Punktesystem auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, giebt jeden Punkt desselben durch sein x, y, z und zerlegt jede der Kräfte in Componenten X, Y, Z, parallel zu den Achsen, so sind die soeben genannten Gleichgewichtsbedingungen bekanntlich durch die Gleichungen

$$1) \qquad \Sigma(X) = 0,$$
$$2) \qquad \Sigma(Y) = 0,$$
$$3) \qquad \Sigma(Z) = 0,$$
$$4) \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0,$$
$$5) \qquad \Sigma(zX - xZ) = 0,$$
$$6) \qquad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

ausgedrückt. Dieselben sagen nämlich aus, dass weder eine Verschiebung längs einer der Achsen, noch eine Drehung um eine derselben, stattfinden kann.

Diese sechs „Gleichungen des Gleichgewichts", oder der Sinn derselben, bieten die Unterlagen zur Auflösung der Aufgaben des vierten Capitels.

Ist das System, dessen Gleichgewicht untersucht werden soll, nicht vollkommen frei, so sind eine oder mehrere der Gleichungen 1) bis 6) schon von selbst erfüllt. Kann z. B. keine Drehung stattfinden, so braucht nur den Gleichungen 1) bis 3) genügt zu werden, weil 4) bis 6) gar nicht mehr in Betracht kommen.

A. Aufgaben über die Standfähigkeit der Körp

Aufgabe 97. Eine gerade Pyramide von der Höhe h h Quadrat als Basis, dessen Seite ebenfalls gleich h ist. Ihre D keit ist proportional dem Quadrate des Abstandes vom Basis punkte; im Abstande 1 von demselben ist das Gewicht der Vo einheit gleich k. Die Pyramide steht auf einer horizontalen An ihrer Spitze greift eine Kraft P an und wirkt in einer Vertica die senkrecht auf der einen Basiskante steht, unter einem spitze kel $90^0 - \alpha$ gegen die Pyramidenhöhe. Ein Fortschieben, od drücken, wird als unmöglich vorausgesetzt. Welche Grösse m Kraft P haben, wenn ihrem Bestreben, die Pyramide umzul durch die Schwere der letzteren das Gleichgewicht gehalten soll? Welchen Werth muss sie haben, wenn sie parallel zun zonte wirkend gedacht wird?

Lösung. Man findet als Bedingung für das Gleichgewic leicht die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(2\cos\alpha - \sin\alpha)\, P = \tfrac{1}{2} G,$$

in welcher G das Pyramidengewicht bedeutet. Dasselbe ist, na gabe 6,

$$G = \tfrac{1}{15}\, k h^5.$$

Mithin hat man

$$P = \tfrac{1}{15} \cdot \frac{k}{2\cos\alpha - \sin\alpha}\, h^5$$

als Grösse der gesuchten Kraft.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man P Componenten U und V zerlegt, von denen die erste horizont zweite vertical wirkt. Es ist dann die Gleichung

$$Uh = (V + G)\frac{h}{2}$$

die Gleichgewichtsbedingung.

Ist P in horizontaler Richtu tig, so muss es gleich $\tfrac{1}{30} k h^5$ sein.

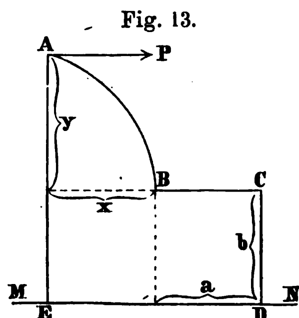


Fig. 13.

Aufgabe 98. Ein Mauerkör der Länge c, dessen Volumeneinl Gewicht q hat, besitzt das Profil A (Fig. 13) und steht auf einer drückbaren Horizontalebene M welcher er unverschiebbar, wohl D umkantbar, ist.

Es soll ermittelt werden, nach was für einer Curve AB gekrümmt sein muss, wenn für jeden Werth von x das Gewicht der Mauer einer parallel zu MN wirkenden constanten Kraft P, die den Körper umwerfen will, das Gleichgewicht halten soll.

Lösung. Aus der leicht aufzustellenden Gleichgewichtsbedingung (Momentegleichung) folgt ohne Schwierigkeit

$$y = b\left(e^{\frac{2ax+x^2}{a^2}} - 1\right)$$

als Gleichung derjenigen Linie, nach welcher AB gekrümmt sein muss.

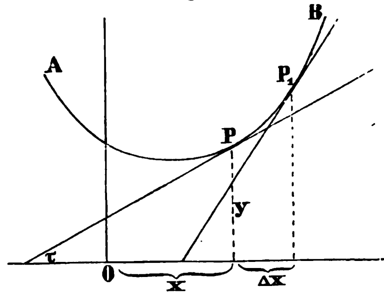
B. Aufgaben über das Gleichgewicht biegsamer Fäden.

α) Einfach gekrümmte Fäden.

Aufgabe 99. Zwischen zwei festen Punkten A und B ist ein vollkommen biegsamer, undehnbarer, homogener Faden, mit dem constanten Querschnitte 1, aufgehangen. Seine Längeneinheit hat das Gewicht p. Nach welchem Gesetze sind in ihm die Spannungen (T) veränderlich und welche Form nimmt er im Gleichgewichtszustande an, wenn auf ihn nur seine eigene Schwere wirkt?

Lösung. Bezeichnet man die Fadenlänge, welche zwischen zwei Punkten P und P_1 liegt (Fig. 14), deren Abscissen x und $x+\Delta x$ sind, mit Δs, die in P nach der Tangentenrichtung abwärts wirkende Spannung mit T, die in P_1 tangential aufwärts thätige mit $T+\Delta T$, die zu P und P_1 gehörenden Tangentenwinkel mit τ und $\tau+\Delta\tau$, so sind die Bedingungen für das Gleichgewicht des Fadens durch die Gleichungen

Fig. 14.



$$(T+\Delta T)\cos(\tau+\Delta\tau) - T\cos\tau = 0 \text{ und}$$
$$(T+\Delta T)\sin(\tau+\Delta\tau) - T\sin\tau - p\,\Delta s = 0$$

ausgedrückt. Dieselben sprechen bekanntlich aus, dass eine Verschiebung in der Richtung der Coordinatenachsen nicht möglich ist. Als dritte Bedingung noch die einzuführen, dass auch Drehung unmöglich sein muss, ist überflüssig; thut man es, so erfährt man durch die neu hinzutretende Gleichung

$-x\, T \sin\tau + y\, T\cos\tau$
$+(x+\varDelta x)(T+\varDelta T)\sin(\tau+\varDelta\tau)-(y+\varDelta y)(T+\varDelta T)\cos(\tau+\varDelta$
$-(x+\alpha\varDelta x)\, p\, \varDelta s$
schliesslich nichts weiter, als

$$\tan\tau = \frac{dy}{dx},$$

dass also die Spannung in der Richtung der Tangente wirken m

Aus den obigen zwei Gleichungen folgt

$$\frac{\varDelta (T\cos\tau)}{\varDelta x} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{\varDelta (T\sin\tau)}{\varDelta x} = p\,\frac{\varDelta s}{\varDelta x},$$

oder beim Uebergange zur Grenze für verschwindende $\varDelta x$,

$$1)\qquad \frac{d(T\cos\tau)}{dx} = 0,$$

$$2)\qquad \frac{d(T\sin\tau)}{dx} = p\,\frac{ds}{dx}.$$

Nach 1) hat man

$$3)\qquad T\cos\tau = Const = C,$$

mithin den Satz: Die Horizontalspannung ist überall gleich gro

Für den Scheitel der Fadencurve ist $\tau = 0$; die daselbst schende Spannung wird passend mit T_0 bezeichnet; dann ist

$$4)\qquad T_0 = C,$$

die Integrationsconstante bedeutet also mechanisch die Scheitelspa

Aus 3) und 4) folgt weiter

$$5)\qquad T = T_0 \sec\tau,$$

d. h. die Spannungen wachsen vom Scheitel aus wie die goniomet Secanten der Tangentenwinkel. Im Scheitel herrscht die k Spannung.

Zur Bestimmung der Curvengleichung hat man nach 5) un

$$\frac{d(T_0 \tan\tau)}{dx} = p\,\frac{ds}{dx};$$

daraus ergiebt sich

$$x = k\, l\,(y' + \sqrt{1+y'^2}) + C_1,$$

worin y' so viel wie $\frac{dy}{dx}$ bedeutet und zur Abkürzung

$$6)\qquad \frac{T_0}{p} = k$$

gesetzt ist. Denkt man sich das Coordinatensystem parallel z fänglichen Lage bis in den Curvenscheitel verschoben, so hat m

$$x = kl\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) \text{ oder}$$
$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) + C_2.$$

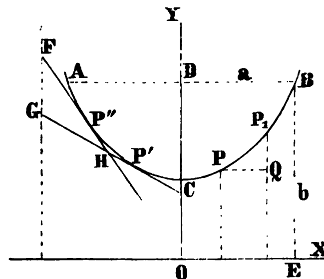
Hierbei ergiebt sich der Werth der Constante C_2 zu $-k$. Die Gleichung wird daher einfacher, wenn man die x-Achse nicht in den Scheitel, sondern um die Strecke k tiefer legt; sie lautet dann

7) $$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Dies ist die eleganteste Form, in welcher man die Gleichung der vorliegenden Fadencurve (die bekanntlich gemeine Kettenlinie oder Seilcurve genannt wird) zu geben vermag. In derselben bedeutet der Parameter k geometrisch den Abstand des Scheitels vom Coordinatenanfange, mechanisch, nach Gleichung 6), das Verhältniss der Scheitelspannung zum Gewichte der Längeneinheit. Wie dieser Parameter aus verschiedenen gegebenen Bestimmungsstücken gefunden werden kann, lehrt die Auflösung der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 100. Der Parameter k der gemeinen Kettenlinie $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ (siehe vorige Aufg.) soll bestimmt werden α) aus der Kettenlänge $ACB = 2s$ und der Einsenkungstiefe (dem Pfeile) $DC = t$; β) aus s und der Ordinate $EB = b$; γ) aus s und dem Aufhängungswinkel α (d. i. der Winkel, welchen die Tangente in B mit der x-Achse bildet); δ) aus s und der Spannweite $AB = 2a$; ε) aus dieser Spannweite und dem Pfeile t; ζ) aus der gegenseitigen Lage zweier Punkte P und P_1, welche durch die Strecken $PQ = m$, $QP_1 = n$ gegeben ist, und aus der zwischen beiden liegenden Kettenlänge L.

Fig. 15.



Lösung. α) Zwischen s, t und k besteht die Beziehung
$$s^2 = (t+k)^2 - k^2 = t^2 + 2tk;$$
es ist also

1) $$k = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2 - t^2}{t},$$

was sich sehr leicht construiren lässt.

Statt auf diese kann man auch auf folgende Weise verfahren: Wird die Scheiteltangente als x-Achse genommen, so ist

$$y = k\,(sec\,\tau - 1) \text{ und } s = k\,tan\,\tau;$$

mithin

$$\frac{t}{s} = \frac{sec\,\alpha - 1}{tan\,\alpha} = tan\,\frac{\alpha}{2}.$$

Hiermit hat man α und dann auch k, weil

$$k = s\,cot\,\alpha.$$

β) Durch s und b ausgedrückt ist

2) $$k = \sqrt{b^2 - s^2}$$

γ) Wie oben hat man $k = s\,cot\,\alpha$.

δ) I. Zwischen a, k und s besteht die Gleichung

$$s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{a}{k} = u$, also

3) $$k = \frac{a}{u},$$

so ist $s = \frac{a}{2u}(e^u - e^{-u})$ oder

4) $$\frac{e^u - e^{-u}}{2u} = \frac{s}{a}.$$

Zur Auflösung dieser transcendenten Gleichung benutzt man T die für die laufenden Werthe von u die zugehörigen von $\frac{e^u - e^{-}}{2u}$ halten. Ist u bestimmt, so hat man auch k.

II. Statt dieser Tabellen kann man auch solche anwende man bei Einführung eines Hilfswinkels erhält. Wird nämlich

5) $$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = cot\,\theta$$

gesetzt, wo also θ das Complement des Aufhängewinkels bedeut folgt

$$e^u = cot\,\frac{\theta}{2}$$

also

6) $$u = l\,cot\,\frac{\theta}{2};$$

mithin geht 4) über in

$$tan\,\theta\,.\,l\,cot\,\frac{\theta}{2} = \frac{a}{s}.$$

Berechnet man nun für die laufenden Werthe von θ die von $tan\,\theta\,.\,l$

und geht in die dadurch erhaltenen Tafeln mit dem gegebenen $\frac{s}{a}$ ein, so findet man das zugehörige θ. Dann hat man u nach 6), oder, wenn man lieber gemeine Logarithmen benutzen will,

$$u = \frac{1}{log\, e} \log \cot \frac{\theta}{2} = 2{,}302 \ldots \log \cot \frac{\theta}{2}.$$

Damit ist auch k bekannt.

III. Wenn man keine solchen Tabellen, wie die unter I) und II) besprochenen, besitzt, oder berechnen will, so kann man die Gleichung 4) näherungsweise durch Anwendung der bekannten Reihe

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{u}{1} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

die bekanntlich für jedes endliche u gilt, auflösen.

IV. Statt dieser arithmetischen Auflösungen kann man auch eine geometrische anwenden, indem man die Curve $v = e^u - e^{-u}$ und die Gerade $v = 2\frac{s}{a}u$ zeichnet, wobei man den Durchschnittspunkt beider erhält. Der Werth der Abscisse desselben ist dasjenige u, welches der Gleichung 4) genügt.

ε) I. Als Beziehung zwischen a, k und t hat man

$$t = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}\right) - k.$$

Setzt man also nach und nach $a = 0{,}01\, k$, $0{,}02\, k$, $0{,}03\, k, \ldots \lambda_n k$, so erhält man die zugehörigen t nach dieser Formel zu $\mu_1 k$, $\mu_2 k$, $\mu_3 k, \ldots \mu_n k$; ferner die Quotienten $\frac{t}{a}$ zu $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots \nu_n$. Stellt man diese Werthe zu einer Tabelle zusammen, so kann man aus dieser für jedes gegebene $\frac{t}{a} = \nu_n$ die Werthe $a = \lambda_n k$ und $t = \mu_n k$ entnehmen, hat mithin

$$k = \frac{a}{\lambda_n}, \text{ oder } k = \frac{t}{\mu_n}.$$

II. Die Herstellung solcher Tafeln zur Bestimmung von k aus a und t kann man auch noch auf andere Weise vornehmen. Es ist nämlich

$$t = k\,(\sec\alpha - 1) \text{ und}$$

$$a = k\, l \tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Man hat also

$$\frac{t}{a} = \frac{\sec\alpha - 1}{l\tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\, l\tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Nach dieser Gleichung, welche sich leicht logarithmisch behandeln lässt, kann man eine Tabelle berechnen, die für $\alpha = 1^0, 2^0, 3^0, \ldots\ldots$ die Beträge von $\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\, l\tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}$ enthält. Geht man in diese mit dem gegebenen Werthe von $\frac{t}{a}$ ein, so findet man den zugehörigen von α. Dann hat man auch k, weil

$$k = \frac{t}{\sec\alpha - 1} = \frac{t\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

ist, was wiederum leicht logarithmisch berechnet werden kann.

ζ) Wird der Bogen CP mit s bezeichnet, so folgt aus den bekannten Gleichungen

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) \text{ und } s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

für den Punkt P

$$y + s = k e^{\frac{x}{k}},\ y - s = k e^{-\frac{x}{k}};$$

eben so für P_1

$$(y+n) + (s+L) = k e^{\frac{x+m}{k}},\ (y+n) - (s+L) = k e^{-\frac{x+m}{k}}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{L^2 - n^2}}{m} = \frac{k}{m}\left(e^{\frac{m}{2k}} - e^{-\frac{m}{2k}}\right),$$

oder, wenn man zur Abkürzung $\frac{m}{k} = z$ setzt,

$$\frac{\sqrt{L^2 - n^2}}{m} = \frac{1}{z}\left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right).$$

Aus dieser Gleichung kann man z auf ähnliche Weise herleiten wie u unter δ) aus der dortigen Formel 4) gefunden worden ist. Hat man aber z, so hat man auch k, weil $k = \frac{m}{z}$.

Aufgabe 101. Für die in Aufgabe 99 und 100 behandelte gemeine Kettenlinie soll Folgendes untersucht werden: I. Die Beziehung

der Spannung T zur Ordinate y; II. desgleichen die zur Normale N und zum Krümmungsradius ϱ; III) die zur Scheitelspannung T_0 und dem Gewichte des vom Scheitel an gerechneten Bogens; IV. die Beziehung dieses Bogengewichts zur Verticalcomponente V der Spannung T; V. die zwischen T, T_0 und V; endlich VI. die, in welcher die Seiten HG und HF (Fig. 15) des Dreiecks HGF zu den in P' und P'' herrschenden Spannungen stehen, wenn HG die Tangentenrichtung für P', HF die für P'' und wenn GF parallel zur y-Achse, also in der Richtung der Schwere; genommen ist.

Lösung. Man gelangt leicht zu folgenden Resultaten:

I. Die Spannung ist gleich dem Gewichte eines der Ordinate gleichen Curvenbogens ($T = py$); oder: die Spannungen sind den Ordinaten proportional.

II. Sie verhalten sich auch wie die Quadratwurzeln der Normalen, oder der Krümmungsradien. ($T = p\sqrt{kN}$; $T = p\sqrt{k\varrho}$.)

III. Das Quadrat der Spannung in irgend einem Punkte, vermindert um das der Scheitelspannung, ist gleich dem Quadrate des Gewichtes des zwischen dem Scheitel und jenem Punkte gelegenen Bogens. ($T^2 - T_0^2 = (ps)^2$.)

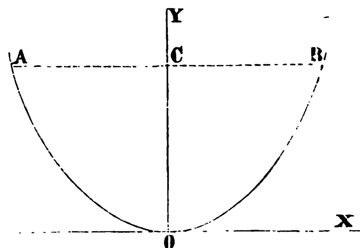
IV. Die Verticalcomponente ist gleich dem Gewichte des vom Scheitel an gerechneten Kettenlinienbogens. ($V = ps$.)

V. Das Quadrat der Spannung in irgend einem Punkte, vermindert um das der Scheitelspannung, ist gleich dem Quadrate der zu dem Punkte gehörenden Verticalspannung. ($T^2 - T_0^2 = V^2$.)

VI. Die Dreiecksseiten HG und HF verhalten sich wie die in den Punkten P' und P'' herrschenden Spannungen.

Aufgabe 102. Zwischen zwei festen Punkten A und B (Fig. 16) hängt ein vollkommen biegsames, undehnbares Seil (oder eine Kette), deren Längeneinheit das constante Gewicht p hat. Jede horizontale Längeneinheit desselben trägt ausserdem noch die Last P. Es soll ermittelt werden, nach welchem Gesetze die Spannungen in diesem Seile veränderlich sind und welche Gestalt es im Gleichgewichtszustande annimmt.

Fig. 16



Lösung. Die Gleichgewichtsbedingungen sind (vergl. Aufg. 99) für ein endliches Bogenstück Δs

$$(T + \Delta T) \cos (\tau + \Delta \tau) - T \cos \tau = 0 \text{ und}$$
$$(T + \Delta T) \sin (\tau + \Delta \tau) - T \sin \tau - p \Delta s - P \Delta x = 0;$$

mithin für ein unendlich kleines

$$d (T \cos \tau) = 0 \text{ und}$$
$$d (T \sin \tau) = p\, ds + P\, dx.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt (wie in Aufg. 99)

$$1) \qquad T = T_0 \sec \tau$$

(wo T_0 wieder die Scheitelspannung bedeutet), als Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen

Zur Herleitung der Gleichung der Seilform hat man hiernach

$$d (T_0 \sec \tau \sin \tau) = p\, ds + P\, dx;$$

daraus ergiebt sich

$$2) \qquad T_0 \int \frac{dy'}{p \sqrt{1 + y'^2} + P} = x + Const.$$

Die Substitution $\sqrt{1 + y'^2} - y' = u$, welche man gewöhnlich anwendet um eine Wurzel von der Form $\sqrt{1 + y'^2}$ wegzuschaffen, ist hier nicht brauchbar. Man muss vielmehr seine Zuflucht zu Näherungsrechnungen nehmen.

I. Setzt man $y'^2 = 0$, was freilich nur bei sehr flacher Spannung zulässig ist, so wird 2) zu

$$T_0 \int \frac{dy'}{P + p} = x + Const.$$

Es folgt also

$$\frac{T_0}{P + p} y' = x,$$

wobei keine Constante hinzuzufügen ist, weil für $x = 0$ auch $y' = 0$ sein muss. Bezeichnet man zur Abkürzung $\frac{T_0}{P + p}$ mit k und beachtet, dass x und y gleichzeitig zu Null werden, so liefert die soeben erhaltene Gleichung:

$$3) \qquad y = \frac{x^2}{2k},$$

d. h. die Curve ist dann eine gemeine Parabel mit dem Halbparameter $k = \frac{T_0}{P + p}$.

II. Man kann ferner

$$\sqrt{1 + y'^2} = m + n y'$$

setzen, (wobei m und n Coefficienten nach Poncelet). Dann folgt aus 2)

$$\frac{T_0}{pn} l(P+mp+npy') = x + Const.$$

Die Constante bestimmt sich hier aus der Bedingung, dass für $x=0$ auch $y'=0$ sein muss; dies eingeführt und zur Abkürzung

$$P+mp=A,$$
$$np=B \text{ und}$$
$$\frac{T_0}{np}=\varkappa$$

gesetzt, giebt

$$l\frac{A+By'}{A}=\frac{x}{\varkappa}, \text{ also}$$

$$y=\frac{A}{B}\left(\varkappa e^{\frac{x}{\varkappa}}-x\right)+Const.$$

Da x und y gleichzeitig in Null übergehen, so hat die Constante den Werth $-\frac{A}{B}\varkappa$; mithin ist

4) $$y=\frac{A}{B}\left(\varkappa e^{\frac{x}{\varkappa}}-x-\varkappa\right)$$

die Gleichung der Seilform.

III. Auf eine dritte Weise kann man in 2) die Wurzel loswerden, wenn man näherungsweise

$$\sqrt{1+y'^2}=1+\tfrac{1}{2}y'^2$$

setzt. Dann ergiebt sich

$$\frac{T_0}{\alpha\beta} \operatorname{arc\,tan}\frac{\beta}{\alpha}y'=x+Const.,$$

wo zur Abkürzung

$$P+p \text{ mit } \alpha^2 \text{ und}$$
$$\frac{p}{2} \text{ mit } \beta^2$$

bezeichnet worden ist. Da nun x und y' gleichzeitig zu Null werden müssen, so ist die Constante $=0$ und man erhält

$$y=-\frac{T_0}{\beta^2} l \cos\frac{\alpha\beta}{T_0}x,$$

(wohinzu ebenfalls keine Constante zu fügen ist) als eine dritte Näherungsgleichung der Curve.

Aufgabe 103. Ein vollkommen biegsamer, undehnbarer, homogener Faden von veränderlichem Querschnitte unterliegt nur der eignen Schwere und ist zwischen zwei festen Punkten A und B (Fig. 16) aufgehangen. Die Einsenkungstiefe $CO=b$, die Spannweite $AB=2a$, das Fadengewicht $2G$ und das Gewicht γ der Volumeneinheit sind ge-

geben. Der Faden soll überall gleich stark gespannt sein, d. h. es soll $\frac{T}{q}$ immer denselben Werth haben wie $\frac{T_0}{q_0}$, wenn T die Spannung und q den Querschnitt an irgend einer Stelle bezeichnen, T_0 und q_0 aber diese Grössen für den Scheitel bedeuten. Man sucht für diese **gleichgespannte Seilcurve** oder **gleichgespannte Kettenlinie** I. die an jedem Punkte herrschende Spannung, II. die Gleichung der Curvengestalt.

Lösung. Wird der Tangentenwinkel im Punkte xy mit τ, das Bogendifferential mit ds bezeichnet, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$1)\qquad d(T\cos\tau) = 0 \text{ und}$$
$$d(T\sin\tau) = \gamma q\, ds.$$

Da nun $\frac{T}{q} = \frac{T_0}{q_0}$, also $q = q_0 \frac{T}{T_0}$ sein soll, so geht die letzte derselben in

$$2)\qquad d(T\sin\tau) = \gamma q_0 \frac{T}{T_0} ds$$

über. Aus der Gleichung 1) folgt

$$3)\qquad T = T_0 \sec\tau,$$

d. h. die Spannungen sind proportional den goniometrischen Secanten der Tangentenwinkel. (Vergl. Aufg. 99 und 102.)

Setzt man 3) in 2) ein, so ergiebt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$T_0 \operatorname{arc} \tan y' = \gamma q_0 x + Const.$$

Weil nun für $x = 0$ auch $y' = 0$ sein muss, so ist die Constante ebenfalls Null und man hat weiter

$$4)\qquad y' = \tan \frac{\gamma q_0}{T_0} x,$$

$$5)\qquad y = \frac{T_0}{\gamma q_0} l \sec \frac{\gamma q_0}{T_0} x,$$

wo wieder keine Constante hinzuzufügen ist. Hiermit ist die Curvengestalt bestimmt, und durch die sofort folgende Gleichung

$$6)\qquad T = T_0 \sec \frac{\gamma q_0}{T_0} x$$

auch die Spannung, wenn nur T_0 und q_0 noch ermittelt werden. Dies kann leicht folgendermassen geschehen: Da der Faden durch den Punkt A geht, so muss, nach 5)

$$b = \frac{T_0}{\gamma q_0} l \sec \frac{\gamma q_0}{T_0} a$$

sein, oder, wenn man zur Abkürzung

7) $$\frac{\gamma q_0 a}{T_0} = \theta$$

setzt,

$$\frac{b}{a} = \frac{l \sec \theta}{\theta}.$$

Die zweite Gleichung zur Bestimmung der beiden unbekannten T_0 und q_0 ergiebt sich aus der Bedingung, dass der Faden das Gewicht $2\,G$ haben soll. Diese liefert

$$G = \int_{x=0}^{x=a} \gamma q \, ds = \gamma q_0 \int_0^a \sec^2 \frac{\gamma q_0 x}{T_0} \, dx,$$

$$G = T_0 \tan \theta.$$

Daraus folgt

8) $$T_0 = G \cot \theta \text{ und}$$

9) $$q_0 = \frac{G}{a \gamma} \theta \cot \theta.$$

Durch die Gleichungen 5) bis 9) ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Aufgabe 104. Wie Aufgabe 103, nur mit dem Unterschiede, dass der Faden nicht blos seinem eignen Gewichte unterliegt, sondern für die horizontale Längeneinheit auch noch die Last P zu tragen hat. Gesucht wird für diese gleichgespannte Kettenbrückenlinie das Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen wie der Querschnitte und die Gestalt der Curve unter Beifügung der Bedingung, dass die absolute Festigkeit des Materials $= F$ sein und die Kette überall die n-fache Sicherheit bieten soll.

Lösung. Wie in Aufgabe 102 ergiebt sich

$$T_0 \int \frac{dy'}{P + p\sqrt{1+y'^2}} = x + Const.$$

Hier ist aber p nicht constant, sondern

$$p = q\gamma = q_0 \gamma \sqrt{1+y'^2},$$

mithin

$$T_0 \int \frac{dy'}{P + \gamma q_0 (1+y'^2)} = x + Const.$$

Daraus folgt

$$y' = \frac{k}{m} \tan \frac{x}{m},$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{T_0}{\gamma q_0} = k \text{ und}$$

$$\frac{T_0}{\sqrt{(P+\gamma q_0)\,\gamma q_0}} = m$$

gesetzt wird; also als Gleichung der Kettenform

$$y = k\, l\, sec\, \frac{x}{m}.$$

Wird ferner die Spannung, welche für die Flächeneinheit zugelassen werden soll, also der Werth $\frac{F}{n}$, mit f bezeichnet und

$$\frac{a\sqrt{(P+q_0\gamma)\, q_0\gamma}}{q_0 f} = \theta$$

gesetzt; so ergeben sich die noch zu ermittelnden Constanten zu

$$q_0 = \frac{a^2 P\gamma}{\theta^2 f^2 - a^2\gamma^2} = \frac{\frac{P}{\gamma}}{\left(\frac{\theta f}{a\gamma}\right)^2 - 1} \text{ und}$$

$$T_0 = q_0 f,$$

wobei θ durch

$$l\, sec\, \theta = \frac{b\gamma}{f}$$

bestimmt ist. Da nun

$$T = T_0\, sec\, \tau \text{ und}$$
$$q = q_0\, sec\, \tau$$

sein muss, so ist hiermit Alles bekannt.

Aufgabe 105. Zwischen zwei festen Punkten A und B (Fig. 16) ist ein vollkommen biegsamer, undehnbarer, schwerer Faden aufgehangen, welcher die constante Materialdichtigkeit ε hat. Es soll bestimmt werden: I. nach welchem Gesetze sich seine Querschnitte q ändern müssen, II. nach welchem die Spannungen T und III. nach welchem die Spannungen pro Flächeneinheit, wenn der Faden die Form eines Halbkreises vom Radius r annehmen und wenn der Scheitelquerschnitt $= q_0$ sein soll.

Lösung. Auf ähnliche Weise wie in den Aufgaben 99) bis 104) gelangt man zu den Resultaten

$$q = \frac{r^2}{r^2 - x^2}\, q_0 = \frac{r^2}{(r-y)^2}\, q_0,$$

$$T = \frac{r^2 g\varepsilon}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, q_0 = \frac{r^2 g\varepsilon}{r-y}\, q_0,$$

$$\frac{T}{q} = g\varepsilon\sqrt{r^2 - x^2} = g\varepsilon\,(r-y),$$

mithin zu den Sätzen: Die Querschnitte müssen sich umgekehrt wie die Quadrate der verticalen Abstände von den Aufhängepunkten verhalten; die Spannungen umgekehrt wie die ersten Potenzen dieser Entfernungen; die auf die Querschnittseinheit kommenden Spannungen direct wie diese ersten Potenzen.

Aufgabe 106. Wie Aufgabe 105, nur mit dem Unterschiede, dass der Faden die Form der gemeinen Parabel

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

annehmen soll.

Lösung. Es ergiebt sich

$$q = \frac{p}{\sqrt{p^2 + x^2}} q_0,$$

$$T = \frac{\sqrt{p^2 + x^2}}{p} T_0 = g\,\varepsilon \sqrt{p^2 + x^2}\, q_0,$$

$$\frac{T}{q} = \frac{p^2 + x^2}{p^2} \cdot \frac{T_0}{q_0}.$$

Die Spannungen wachsen also umgekehrt wie die Querschnitte.

Aufgabe 107. Der in Aufgabe 105 angegebene Faden soll eine Form annehmen, welcher die allgemeine Gleichung

$$y = f(x)$$

zukommt. Gesucht werden wieder die Gesetze für die Veränderlichkeit der Querschnitte und der Spannungen.

Lösung. Man findet zunächst

$$T = T_0 \sec\tau \text{ und}$$

$$q = \frac{T_0}{g\,\varepsilon} \cdot \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}.$$

Hierin bedeutet T_0 die Scheitelspannung. Für dieselbe ergiebt sich

$$T_0 = \frac{g\,\varepsilon}{f''(o)} q_0;$$

mithin ist

$$q = \frac{f''(x)}{f''(o)\sqrt{1 + f'(x)^2}} q_0 \quad .$$

das Gesetz für die Veränderlichkeit der Querschnitte und

$$T = g\,\varepsilon \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{f''(o)} q_0$$

das für die der Spannungen.

Aufgabe 108. Der Querschnitt eines zwischen A und B (Fig. 16) aufgehangenen, undehnbaren, vollkommen biegsamen Fadens, welcher

nur der Wirkung der Schwere unterworfen ist, ändert sich proportional dem Quadrate der Abscisse ($q = cx^2$). Es soll ermittelt werden: I. nach welchem Gesetze die Dichtigkeit ε des Fadens veränderlich sein muss, wenn derselbe die Form einer **halben Ellipse** mit den Halbachsen $CB = a$, $CO = b$ annehmen und im Scheitel O die Spannung T_0 haben soll; II. wie in diesem Faden die Spannungen veränderlich sind; III. wie die Resultate für den Fall lauten, dass die halbe Ellipse zu einem **Halbkreise** wird.

Lösung. Nach Anleitung der Lösung der Aufgaben 99 bis 104 findet man

$$T = \frac{T_0}{a}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}}$$

als Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen und

$$\varepsilon = \frac{T_0 a^2 b}{cg} \cdot \frac{1}{x^2 (a^2 - x^2)\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}$$

als das für die der Dichtigkeiten.

Für den Kreis ergeben sich hieraus die einfacheren Gleichungen

$$T = T_0 a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ und}$$

$$\varepsilon = \frac{T_0 a}{cg} \cdot \frac{1}{x^2 (a^2 - x^2)},$$

welche leicht in Worte übersetzt werden können.

Aufgabe 109. Ein homogener, undehnbarer, vollkommen biegsamer Faden ist so aufgehangen, dass er durch den Punkt ab geht (Fig. 15) und im Scheitel C die Ordinate c hat. Sein Querschnitt q ist veränderlich und zwar so, dass immer

$$q = q_0 \cos\tau = q_0 \frac{dx}{ds},$$

wobei q_0 der Scheitelquerschnitt. Der Faden unterliegt nur dem Einflusse seiner eignen Schwere. Man soll bestimmen, welche Gestalt er im Gleichgewichtszustande annimmt und nach welchem Gesetze die Spannungen in ihm sich ändern.

Lösung. Aus den hier geltenden Gleichgewichtsbedingungen folgt leicht

$$y - c = \frac{b - c}{a^2} x^2$$

als Gleichung der Fadengestalt; dieselbe ist also eine **gemeine Pa-**

rabel in der durch Fig. 15 angedeuteten Lage. Ihr Parameter ist $\frac{a^2}{b-c}$.

Das Gesetz, nach welchem die Spannung T im Faden sich ändert, ergiebt sich zu

$$T=\frac{g\varepsilon q_0}{2(b-c)}\sqrt{a^4+4(b-c)^2x^2},$$

wofür auch

$$T=\frac{g\varepsilon q_0 a}{2(b-c)}\sqrt{a^2+4(b-c)(y-c)}$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 110. An den Enden A und B einer unveränderlichen Geraden AB (Fig. 15) ist ein vollkommen biegsamer, undehnbarer, homogener Faden aufgehangen. Die Gerade hat die Länge $2a$ und liegt im Abstande b parallel zur x-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems. Der Faden dreht sich um die y-Achse mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w, unterliegt aber sonst nur noch dem Einflusse seiner eigenen Schwere. Seine Scheitelordinate ist im Gleichgewichtszustande gleich c; sein Querschnitt q ändert sich so, dass immer $q=q_0 \cos\tau = q_0\frac{dx}{ds}$ ist, wobei q_0 den Scheitelquerschnitt bedeutet. Es soll bestimmt werden, welche Form der Faden im Gleichgewichtszustande hat und nach welchem Gesetze hierbei die Spannungen in ihm veränderlich sind.

Lösung. Man findet zunächst

$$T=\tfrac{1}{2}(2T_0-\varepsilon q_0 w^2 x^2)\frac{ds}{dx},$$

worin T_0 und ε dieselbe Bedeutung haben wie in den vorhergehenden Aufgaben.

Hieraus folgt sodann

$$y=b+\frac{g}{w^2}\,l\,\frac{\varepsilon q_0 w^2 a^2-2T_0}{\varepsilon q_0 w^2 x^2-2T_0}.$$

Die in diesen Gleichungen vorkommende Scheitelspannung T_0 ergiebt sich leicht zu

$$T_0=\frac{\varepsilon q_0 a^2 w^2}{2\left(1-e^{\frac{c-b}{g}w^2}\right)}.$$

Dies liefert als Gleichung der Fadenform, wenn man zur Abkürzung

$$e^{\frac{c-b}{g}w^2}=h$$

setzt

$$y = b + \frac{g}{w^2} l \frac{a^2 h}{a^2 - (1-h) x^2}.$$

Mithin erhält man als Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannun

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon q_0}{1-h} \sqrt{4 g^2 (1-h)^2 x^2 + w^4 [a^2 - (1-h) x^2]^2}.$$

Aufgabe 111. Es soll ermittelt werden, welcher Art die paral zu den Coordinatenachsen auf jedes Fadenelement (Fig. 16) wirkend Kräfte X und Y sein müssen, wenn der vollkommen biegsame, undel bare Faden die Form einer Kreislinie annehmen und überall glei stark gespannt sein soll.

Lösung. Es ergiebt sich leicht, wenn zur Abkürzung

$$\frac{T}{a^2 q \varepsilon} = k$$

gesetzt wird, a den Kreisradius bedeutet, übrigens aber die sch vielfach benutzten Bezeichnungen gelten,

$$X = kx,$$
$$Y = -k(a-y).$$

Die Resultante von X und Y muss also

$$R = ka,$$

d. h. constant, sein.

Für ihre Richtung folgt, dass sie mit der des Halbmessers sammenfällt. Auch ohne Rechnung sind diese Resultate leicht gebbar.

Aufgabe 112. Auf einen Faden, der zwischen zwei festen Pu ten aufgehangen ist, wirken in seiner Ebene beliebige Kräfte, wel parallel zu zwei rechtwinkligen Coordinatenachsen, für die Masse 1 Resultanten $X = f_1(x)$, $Y = f_2(x)$ geben; derselbe hat die Läng die Dichtigkeit $\varepsilon = F(x)$, den Querschnitt $q = \Phi(x)$.

Man soll I. die Bedingungen für das Gleichgewicht des Fad angeben und II. das allgemeine Gesetz herleiten, nach welchem s die Spannungen (T) in ihm ändern.

Lösung. Die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen sind

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\varepsilon q\, ds = 0 \text{ und}$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\varepsilon q\, ds = 0.$$

Aus denselben folgt

$$T\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dx}{ds}\, dT = -\varepsilon q\, X ds \text{ und}$$

$$T\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}\,dT=-\varepsilon q\,Y\,ds.$$

Da nun

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1$$

ist, also

$$\frac{dx}{ds}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

so erhält man, wenn man diese zwei Gleichungen mit $\frac{dx}{ds}$, bezüglich $\frac{dy}{ds}$, multiplicirt und dann addirt

$$dT=-\varepsilon q\,(X\,dx+Y\,dy).$$

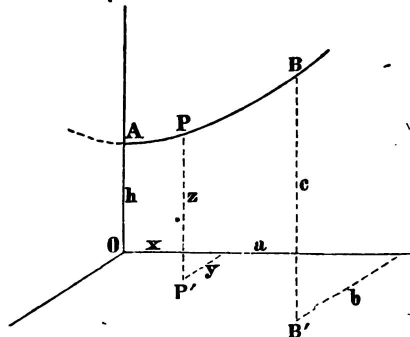
Das Gesetz für die Veränderlichkeit der Spannungen ist daher

$$T=-\int\varepsilon q\,(X\,dx+Y\,dy).$$

β) Doppelt gekrümmte Fäden.

Aufgabe 113. Auf den vollkommen biegsamen, undehnbaren, gleichdicken Faden AB wirken seine Schwere und, parallel zur x-Achse, pro Masseneinheit, die Kraft $X=kx$. Er geht durch den Punkt A, dessen z den Werth h hat, derart, dass seine Tangente daselbst die Winkel α, β und γ mit der x-, y- und z-Achse bildet; ferner durch den Punkt B, welchem die Coordinaten a, b und c zukommen. Seine Dichtigkeit ε ist veränderlich und zwar ist immer $\varepsilon=\varepsilon_0\cos\lambda=\varepsilon_0\frac{dx}{ds}$. Es soll die Form bestimmt werden, welche der Faden im Gleichgewichtszustande annimmt und das Gesetz, nach welchem in demselben die Spannungen veränderlich sind.

Fig. 17.



Lösung. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten hier, unter Beibehaltung der in den vorhergehenden Aufgaben benutzten Bezeichnungen,

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=-q\,\varepsilon_0\,k\,x\,dx,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=0,$$
$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right)=q\varepsilon_0\,g\,dx.$$

Aus denselben erhält man durch Integration und gehörige Beachtung der zur Constantenbestimmung vorliegenden Bedingungen

$$1)\quad T=T_1\cos\beta\frac{ds}{dy},$$
$$2)\quad y=L\cos\beta\, l\frac{M+Nx}{M-Nx},$$
$$3)\quad z=h+2L\cos\gamma\, l\frac{M+Nx}{M-Nx}+\frac{g\varepsilon}{k}\cdot\frac{M^2}{M^2-N^2x^2},$$

in welchen Gleichungen zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{T_1}{2kq\varepsilon_0\cos\alpha}}=L,$$
$$\sqrt{2T_1\cos\alpha}=M,$$
$$\sqrt{qk\varepsilon_0}=N$$

gesetzt worden ist und T_1 die in A herrschende Spannung bedeutet. Was die Letztere betrifft, so ist sie aus 2) oder 3) herleitbar, weil für $x=a$ y zu b und z zu c werden muss.

Aufgabe 114. Welche Kräfte X, Y und Z müssen parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems auf einen vollkommen biegsamen, homogenen, gleichstarken Faden wirken, wenn derselbe die Form der Schraubenlinie

$$x=a\cos\frac{z}{c},\quad y=a\sin\frac{z}{c},$$
$$(c=a\tan\beta)$$

annehmen und wenn die in ihm herrschende Spannung T immer gleich bz sein soll?

Lösung. Die für diesen Fall geltenden Gleichgewichtsbedingungen liefern

$$Z=-\frac{b\sin^2\beta}{q\varepsilon},$$
$$Y=\frac{b\cos^2\beta}{a^2q\varepsilon}(yz-cx),$$
$$X=\frac{b\cos^2\beta}{a^2q\varepsilon}(xz+cy)$$

als Werthe der gesuchten Kräfte.

Aufgabe 115. Ein Faden hat die Länge s, die Dichtigkeit $\varepsilon = F(x)$, den Querschnitt $q = \Phi(x)$, ist vollkommen biegsam, undehnbar und zwischen zwei festen Punkten aufgehangen. Er unterliegt der Wirkung von beliebig vielen Kräften, die parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems (siehe Fig. 17) die Resultanten $X = f_1(x)$, $Y = f_2(x)$, $Z = f_3(x)$ liefern. Man verlangt die Angabe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für denselben und das Gesetz, nach welchem in ihm die Spannungen (T) sich ändern.

Lösung. Die Gleichgewichtsbedingungen sind

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = -q\,\varepsilon\,X\,ds,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = -q\,\varepsilon\,Y\,ds,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = -q\,\varepsilon\,Z\,ds.$$

Das Gesetz für die Spannungen ergiebt sich auf dieselbe Weise wie in Aufgabe 112 zu

$$T = -\int \varepsilon\, q\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Capitel V.

Aufgaben über die Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten.

Erklärung. Wird ein System von Punkten, welches sich Gleichgewichte befindet, unendlich wenig verrückt, so dass jeder Pun desselben in eine neue, von der alten unendlich wenig verschiede Lage kommt, so nennt man bekanntlich die gerade Verbindungsli dieser beiden Lagen die virtuelle Geschwindigkeit dieses Punkt

Projicirt man diese virtuelle Geschwindigkeit auf eine Gerade *M* so heisst die entstehende Projection die virtuelle Geschwindi keit des Punktes bezogen auf die Gerade *MN*. Das Vorz chen derselben ergiebt sich aus dem des Cosinus desjenigen Winke unter welchem projicirt wird.

Das Produkt aus der Intensität einer Kraft in die auf ihre Ri tung bezogene virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes wi das virtuelle Moment der Kraft genannt.

Erleidet jeder Punkt eines im Gleichgewichte befindlichen Syste irgend eine unendlich kleine Verrückung (die aber natürlich mit d Bedingungen des Systems vereinbar sein muss), so ist immer die gebraische Summe aller virtuellen Momente gleich Null.

Umgekehrt: ist die algebraische Summe aller virtuellen Momer bei allen virtuellen Verrückungen gleich Null, so befindet sich d System im Gleichgewichte.

Bezeichnet man die Kräfte mit $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$, die Projection der Wege der Angriffspunkte auf die Richtungslinien der Kräfte n $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$, so drückt die Gleichung

$$1) \quad \begin{cases} P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots\ldots + P_n p_n = 0, \text{ oder} \\ \Sigma(Pp) = 0 \end{cases}$$

das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aus.

Bezeichnen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Angriffspunktes einer Kraft P, welche die Winkel α, β, γ mit den Coordinatenachsen bildet, und nimmt man in der Richtung von P einen bestimmten Punkt abc an, der von xyz um s entfernt ist, so hat man

$$s^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \text{ und}$$

$$p = ds = \frac{x-a}{s}\,dx + \frac{y-b}{s}\,dy + \frac{z-c}{s}\,dz$$

oder

$$p = \cos\alpha \,.\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz;$$

mithin geht die Gleichung 1) über in

$$\left.\begin{array}{r} P_1\,(\cos\alpha_1\, dx_1 + \cos\beta_1\, dy_1 + \cos\gamma_1\, dz_1) \\ + P_2\,(\cos\alpha_2\, dx_2 + \cos\beta_2\, dy_2 + \cos\gamma_2\, dz_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

oder in

$$2) \qquad \Sigma P(\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz) = 0.$$

Diese Sätze sollen zur Lösung der Aufgaben dieses Capitels vorausgesetzt werden.

Aufgabe 116. Die Aufgabe 10 soll mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten gelöst werden.

Lösung. Wird die Lage des Coordinatensystems so angenommen wie in der früheren Lösung der Aufgabe angeführt worden ist, werden ferner die Entfernungen des Punktes Q von den Punkten C_1, C_2, C_3, mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet und die drei Anziehungen P_1, P_2, P_3 genannt, so hat man als Gleichgewichtsbedingung

$$P_1\, du_1 - P_2\, du_2 + P_3\, du_3 = 0.$$

Hierbei ist

$$P_1 = k m_1 u_1,\quad P_2 = k m_2 u_2,\quad P_3 = k m_3 u_3,$$
$$u_1 = \sqrt{x^2+y^2},\quad u_2 = \sqrt{(a_2-x)^2+y^2},\quad u_3 = \sqrt{(x-a_3)^2+(b_3-y)^2}.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe ergeben sich wieder die in Aufgabe 10 angeführten Ausdrücke für x und y.

Aufgabe 117. Auf einen vollkommen frei beweglichen Punkt, welcher auf ein rechtwinkliges, räumliches Coordinatensystem bezogen ist, wirken die Kräfte

P_1 unter den Winkeln α_1, β_1, γ_1 (gegen die Achsen)
P_2 „ „ „ α_2, β_2, γ_2,
. . . .
P_n „ „ „ α_n, β_n, γ_n.

Es sollen die Bedingungen ermittelt werden, unter welchen der Pun im Gleichgewichte ist.*)

Lösung. Man denke sich, dass der Punkt eine unendlich klei Verrückung s erleide, deren Richtung mit den Achsen die Winkel μ, ν bilde und bezeichne die Projectionen von s auf die Kräfterichtu gen mit $p_1, p_2, \ldots p_n$. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = 0.$$

Die hier noch zu eliminirenden p sind durch die Beziehungen

$$\frac{p_1}{s} = \cos\alpha_1 \cos\lambda + \cos\beta_1 \cos\mu + \cos\gamma_1 \cos\nu,$$

$$\frac{p_2}{s} = \cos\alpha_2 \cos\lambda + \cos\beta_2 \cos\mu + \cos\gamma_2 \cos\nu,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{p_n}{s} = \cos\alpha_n \cos\lambda + \cos\beta_n \cos\mu + \cos\gamma_n \cos\nu$$

bestimmt.

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots + P_n \cos\alpha_n = 0,$$
$$P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \ldots + P_n \cos\beta_n = 0,$$
$$P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \ldots + P_n \cos\gamma_n = 0$$

als Bedingungen für das Gleichgewicht.

Aufgabe 118. Ein Punkt kann sich nur auf einer räumliche Curve bewegen, deren Gleichungen bezogen auf ein rechtwinklig Coordinatensystem

$$y = f(x) \text{ und } z = \varphi(x)$$

sind. Auf denselben wirken beliebig viele Kräfte. Man sucht die B dingung für sein Gleichgewicht.

Lösung. Denkt man sich alle Kräfte zu drei Resultanten X, Y, zusammengesetzt, welche parallel zu den Achsen thätig sind, und stel sich vor, dass sich der Punkt auf der Curve um den unendlich kleine Bogen ds verrückt habe, so ergiebt sich sofort als Gleichgewichtsb dingung

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

was mit der Lösung der Aufgabe 37 übereinstimmt.

---

*) Dass die Lösung dieser Aufgabe, wie auch die aller folgende dieses Capitels, eben durch Anwendung des Principes der virtuelle Geschwindigkeiten erfolgen soll, bedarf wohl kaum stets besondere Erwähnung, da die Capitelüberschrift es deutlich genug ausspricht.

Aufgabe 119. Es sollen die Gleichgewichtsbedingungen für einen Punkt hergeleitet werden, welcher von beliebig vielen Kräften beeinflusst wird und sich nur auf einer Fläche bewegen kann, deren Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben ist.

Lösung. Auf ganz ähnliche Weise, wie in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$X + Z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ und}$$

$$Y + Z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Aufgabe 120. Auf einer schiefen Ebene ABC, deren Neigungswinkel BAC gegen den Horizont AC gleich α ist, wird ein Körper K durch eine constante Kraft P beeinflusst, welche mit dem Horizonte den Winkel β bildet und im Schwerpunkte des Körpers angreift. Von der Reibung wird abgesehen. Man verlangt, dass mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten die Bedingung hergeleitet werden soll, unter welcher das Gewicht Q des Körpers und die Kraft P im Gleichgewichte sind.

Lösung. Wird der Schwerpunkt S um das unendlich kleine Stück SS_1 parallel zu AB (etwa aufwärts) verschoben gedacht, so ist $SS_1 . \cos(\beta - \alpha)$ die virtuelle Geschwindigkeit von S bezogen auf P und $SS_1 . \sin\alpha$ die in Bezug auf Q. Die Gleichgewichtsbedingung ist mithin

$$P\cos(\beta - \alpha) = Q\sin\alpha$$

also für $\beta = \alpha$ sehr einfach

$$P = Q\sin\alpha.$$

Aufgabe 121. An einem Hebel ACA_1, welcher im Punkte C unterstützt ist, wirken zwei Kräfte P und P_1 in den Endpunkten A und A_1. Die von C auf die Kraftrichtungen gefällten Senkrechten haben die Längen a und a_1. Welches ist die Bedingung für das Gleichgewicht?

Lösung. Denkt man sich den Hebel aus der Ruhelage ACC_1 um den unendlich kleinen Winkel w herausgedreht, so dass A und A_1 die Bögen $AA' = b$ und $A_1A_1' = b_1$ beschreiben und bezeichnet die Projectionen von b und b_1 auf die Kraftrichtungen mit p und p_1, so hat man nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$-Pp + P_1p_1 = 0$$

als Gleichgewichtsbedingung.

Werden die Strecken CA und CA_1, c und c_1 genannt, so hat man hierbei

$$p = \frac{ab}{c}, \quad p_1 = \frac{a_1 b_1}{c_1}.$$

Dies eingesetzt und gehörig beachtet, dass b und b_1 Kreisbögen sind, die zu gleichen Centriwinkeln gehören, giebt die bekannte Momentegleichung

$$Pa = P_1 a_1.$$

Aufgabe 122. Es soll mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichgewichtsbedingung für den gemeinen Flaschenzug hergeleitet werden, unter der Voraussetzung, dass die Seile als parallel angesehen werden können.

Lösung. Es sei P die Kraft (etwa ein Gewicht) welche am freien Seilende wirkt; Q die an der beweglichen Flasche hängende Last, der sie das Gleichgewicht halten soll.

Denkt man sich P um ein unendlich kleines Stück a gesenkt, Q um b hierbei gehoben, so muss

$$Pa - Qb = 0$$

sein. Sind nun in der beweglichen Flasche n Rollen, laufen von derselben aus also $2n$ Seile, so besteht die Beziehung

$$2nb = a.$$

Die gesuchte Gleichgewichtsbedingung ist mithin

$$P = \frac{Q}{2n}.$$

Aufgabe 123. Eine horizontal liegende Schraube S, deren Gänge die Höhe h haben und deren kreisförmiger Kopf den Radius a besitzt, geht durch eine feste Mutter und wirkt bewegend auf einen Körper K, welcher ihr den Widerstand Q entgegensetzt. An der Peripherie des Kopfes ist in tangentialer Richtung die Kraft P thätig. Es soll, bei Nichtbeachtung der Reibung, die Bedingung entwickelt werden, unter welcher P und Q im Gleichgewichte sind.

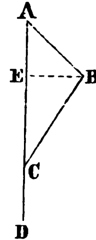
Lösung. Man denke sich P als ein Gewicht, welches mittelst eines Fadens den Schraubenkopf dreht. Senkt sich dieses Gewicht um die unendlich kleine Strecke s, so bewegt sich die Schraubenspitze um ein anderes ebenfalls unendlich kleines Stück s_1. Aus der zwischen s und s_1 bestehenden einfachen Beziehung ergiebt sich hiermit nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$P = \frac{h}{2a\pi} Q$$

als Gleichgewichtsbedingung.

Aufgabe 124. Mit einer festen Geraden AD (Fig. 18), auf welcher der Punkt C beweglich, A aber unbeweglich, befindet sich eine gebrochene ABC so in Verbindung, dass AB um A drehbar ist und in B sich ein Gelenk befindet, welches gestattet, dass eine Kraft P den Punkt B der Geraden AD nähern kann, indem C herabgeschoben wird. P wirkt senkrecht gegen AD; Q, an C, in der Richtung CA. Die Gerade AB hat die Länge a, BC ist gleich b, $\angle ACB = \alpha$, $\angle CAB = \beta$; EB möge mit x, AC mit y bezeichnet werden.

Fig. 18.



Es soll die Gleichgewichtsbedingung für das vorliegende System von starren Geraden (Kniepresse) ermittelt werden und zwar I. als Beziehung zwischen P, Q, a, b und x; II. als solche zwischen P, Q, a, b und α oder β; III. endlich als eine Gleichung zwischen P, Q, α und β.

Lösung. Unter Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten findet man zunächst als Gleichgewichtsbedingung

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Bei gehöriger Beachtung derjenigen Beziehungen, welche für die in Betracht kommenden Grössen gelten, ergeben sich hieraus leicht die Gleichungen

$$\text{I)} \qquad P = Q\frac{\sqrt{b^2-x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}}\,x,$$

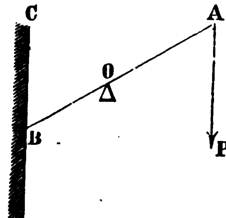
$$\text{II)}\; P = Q\,\frac{b\sin\alpha+\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}\,\tan\alpha}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}} = Q\,\frac{a\sin\beta+\sqrt{b^2-a^2\sin^2\beta}\,\tan\beta}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2\beta}},$$

$$\text{III)} \qquad P = Q\,(\tan\alpha+\tan\beta)$$

als Auflösungen der gestellten Aufgabe.

Aufgabe 125. Gegen eine feste Wand CB stützt sich mit ihrem einen Ende B eine starre, gewichtslose Gerade AOB von der Länge a, welche in einem Punkte O unterstützt ist und an ihrem anderen Ende A ein Gewicht P trägt. Man verlangt, dass mittelst des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten diejenige Lage bestimmt werden soll, in welcher AOB im Gleichgewichte ist, wenn von der Reibung abgesehen wird.

Fig. 19.



Lösung. Auf AOB wirken 1) das Gewicht P vertical nach unten; 2) der Widerstand des Stützpunktes O, senkrecht gegen AB; 3) der Widerstand der Wand CB, senkrecht zu ihr selbst.

Bezeichnet man nun den verticalen Abstand des Punktes A von der Horizontalen durch O mit z, die Länge OB mit x, den horizontalen Abstand des Drehpunktes O von der Wand CB mit b, so ergiebt sich, nach kurzer Zwischenrechnung und bei gehöriger Beachtung der zwischen a, b, x und z bestehenden Beziehungen, dass

$$x = \sqrt[3]{a\, b^2}$$

sein muss, wenn AB sich im Gleichgewichte befinden soll.

Capitel VI.

Aufgaben über die Anziehung der Linien, Flächen und Körper.

Erklärung. Wenn die Anziehung proportional der Masse und irgend einer Funktion der Entfernung u vorausgesetzt wird, so üben zwei Punkte, welche die Massen m und m_1 haben, auf einander die Wirkung

$$k m m_1 F(u)$$

aus. Hat z. B. der eine der Punkte die Masse 1, der andere die Masse μ und wird die Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angenommen, so ist die Wirkung, welche der erste Punkt vom zweiten erleidet,

$$A = \frac{k\mu}{u^2}.$$

Der Anziehungscoefficient k bedeutet also diejenige Anziehung, welche die Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung 1 ausübt.

Liegt statt des einen Punktes ein Körper vor, so sind die Anziehungen, welche die einzelnen Massenelemente desselben auf irgend einen materiellen Punkt ausüben, von verschiedener Richtung, man muss sie daher passend in Componenten zerlegen, um sie summiren (integriren) zu können.

Dasselbe gilt, wenn die Anziehung von einer materiellen Fläche oder Linie ausgeübt wird.

Hiernach sind die Aufgaben dieses Capitels zu behandeln.

A. Anziehung der Linien.

Aufgabe 126. Eine materielle Gerade AB, von der Länge b, wirkt anziehend auf einen Punkt P, welcher in ihrer Richtung liegt. Der Querschnitt der Geraden ist constant $= q$; die Dichtigkeit dersel-

ben ebenfalls constant und zwar $= \varepsilon$. Der angezogene Punkt hat die Masse 1 und befindet sich im Abstande $BP = a$ von dem Endpunkte B. Die Anziehung erfolgt nach dem Newton'schen Gesetze, also proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung; es soll ihre Grösse X ermittelt werden, wenn der Punkt P I. ausserhalb AB, II. im Endpunkte B, III. innerhalb AB liegt.

Lösung. I. Die Entfernung AQ eines beliebigen zwischen A und B an der Stelle Q gelegenen Linienelementes möge mit x bezeichnet werden. Dann ist die Anziehung, welche es auf P ausübt

$$dX = -\frac{kq\varepsilon}{(a+b-x)^2}\,dx,$$

wobei k ein Anziehungscoefficient.

Die Wirkung, die von der ganzen Geraden ausgeübt wird, ergiebt sich hieraus zu

$$X = -\frac{kbq\varepsilon}{a(a+b)},$$

oder, wenn man die Masse der Geraden AB mit m bezeichnet,

$$X = -\frac{km}{a(a+b)}.$$

Sie ist mithin eben so gross, als wenn die gesammte Masse in einem Punkte C vereinigt wäre, dessen Entfernung von P gleich dem geometrischen Mittel zu a und $a+b$.

II. Liegt P im Endpunkte B, so ist a gleich Null, daher

$$X = -\infty.$$

Der Anziehungsmittelpunkt C fällt mit B und P zusammen.

III. Wenn endlich P innerhalb AB liegt, a also negativ ist, so ergiebt sich ohne Rechnung, dass die Anziehung, welche P erleidet, derjenigen gleich ist, die die Strecke $b-2a$ der Geraden nach I. ausübt. Ihr absoluter Werth ist mithin

$$X = \frac{k(b-2a)q\varepsilon}{a(b-a)},$$

oder, wenn die Masse des Stückes $b-2a$ mit μ bezeichnet wird,

$$X = \frac{k\mu}{a(b-a)}.$$

Aufgabe 127. Ein Punkt P (Fig. 20) von der Masse 1 wird durch eine materielle Gerade B_1B_2, die die Länge b, den constanten Querschnitt q und die ebenfalls constante Dichtigkeit ε besitzt, nach dem Newton'schen Gesetze angezogen. Derselbe befindet sich ausserhalb der Richtung der Geraden im senkrechten Abstande a so gelegen,

dass das von ihm auf $B_1 B_2$ gefällte Loth PO die Strecke $B_1 B_2$ in die beiden Theile $OB_1 = b_1$ und $OB_2 = b_2$ zerlegt.

Es soll untersucht werden, I. welches die Grösse und Richtung der Anziehung R ist, die der Punkt P von der Geraden $B_1 B_2$ erleidet; II. wo der Punkt liegt, in welchem concentrirt die Masse der Geraden dieselbe Anziehung ausüben würde, wie wenn sie längs $B_1 B_2$ vertheilt ist; III. wie er sich construiren lässt; IV. wie die Resultate dann lauten, wenn $b_1 = b_2$ ist.

Lösung. Nimmt man OP als die Achse der x, OB_1 als die der y, so übt ein Linienelement, welches sich im Abstande y von O befindet, auf P die Anziehung

$$dR = -\frac{kq\varepsilon}{a^2+y^2}dy$$

aus; dies giebt parallel zur x-Achse eine Componente

$$dX_1 = -\frac{kaq\varepsilon}{\sqrt{a^2+y^2}^3}dy$$

und parallel zu der der y

$$dY_1 = \frac{kq\varepsilon y}{\sqrt{a^2+y^2}^3}dy.$$

Die Gesammtwirkung, welche von dem Theile OB_1 der Geraden in der Richtung der x hervorgebracht wird, ist mithin

$$X_1 = -\frac{kq\varepsilon}{a}\cdot\frac{b_1}{\sqrt{a^2+b_1^2}},$$

oder, wenn man PB_1 mit c_1 und die Masse von OB_1 mit m_1 bezeichnet,

$$X_1 = -\frac{km_1}{ac_1}.$$

Wird der Winkel $B_1 PO = \beta_1$ gesetzt, so kann man auch

$$X_1 = -\frac{kq\varepsilon}{a}\sin\beta_1$$

schreiben.

Eben so gilt natürlich für die Anziehung, welche OB_2 parallel zur x-Achse äussert,

$$X_2 = -\frac{kq\varepsilon}{a}\cdot\frac{b_2}{\sqrt{a^2+b_2^2}} = -\frac{km_2}{ac_2} = -\frac{kq\varepsilon}{a}\sin\beta_2,$$

worin die Bezeichungen gerade so gewählt sind, wie vorher.

Ferner folgt für die gleich gerichtete Anziehungscomponente der ganzen Geraden $B_1 B_2$

$$X = -\frac{kq\varepsilon}{a}\left(\frac{b_1}{\sqrt{a^2+b_1^2}} + \frac{b_2}{\sqrt{a^2+b_2^2}}\right)$$
$$= -\frac{k}{a}\left(\frac{m_1}{c_1}+\frac{m_2}{c_2}\right) = -\frac{kq\varepsilon}{a}(\sin\beta_1 + \sin\beta_2).$$

Desgleichen gelangt man, von der Gleichung für dY_1 ausgehend, zu den Werthen

$$Y_1 = kq\varepsilon\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b_1^2}}\right),$$
$$Y_2 = -kq\varepsilon\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b_2^2}}\right),$$
$$Y = kq\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b_1^2}}\right),$$

oder besser

$$Y = \frac{kq\varepsilon}{a}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1).$$

Mithin ist die Grösse der Gesammtanziehung

$$R = 2\frac{kq\varepsilon}{a}\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}.$$

Die Richtung derselben wird durch den Winkel φ bestimmt, den R mit der x-Achse einschliesst; für denselben ergiebt sich leicht

$$\varphi = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}.$$

II. Der Punkt Q, in welchem die ganze Masse m vereinigt werden müsste, wenn sie auf P dieselbe Anziehung ausüben sollte, wie bei ihrer Vertheilung längs $B_1 B_2$, muss natürlich in der Richtung von R liegen. Sein Abstand r von P folgt leicht zu

$$r = \sqrt{\frac{ab}{2}\csc\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}.$$

Dieser Ausdruck würde als geometrisches Mittel zu a und $\frac{1}{2}b\csc\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$ darstellbar sein.

III. Er lässt jedoch eine für die Construction sehr brauchbare Umformung zu, wenn man beachtet, dass die Masse von $B_1 B_2$

$$m = aq\varepsilon(\tan\beta_1 + \tan\beta_2)$$

ist. Dann ergiebt sich

$$r^2 = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\tan\beta_1+\tan\beta_2}{\sin\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)},$$
$$r^2 = a^2\frac{\cos\beta_1+\cos\beta_2}{2\cos\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\cos\beta_1\cos\beta_2},$$

$$r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\cos\beta_1} + \frac{a}{\cos\beta_2}\right)\frac{a}{\cos\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)},$$

d. i. so viel wie

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}(\overline{PB_1} + \overline{PB_2})\,\overline{PC}}.$$

Man erhält mithin r als geometrisches Mittel zu

$$\frac{1}{2}(\overline{PB_1} + \overline{PB_2})$$

und PC. Die Fig. 20, in welcher $\angle CPO = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)$, $PD = \frac{1}{2}(PB_1 + PB_2)$ und $PQ = PE$ ist, wird die Ausführung der Construction hinreichend angeben.

Fig. 20.

IV. Für $b_1 = b_2$ ergiebt sich

$$X = -\frac{km}{ac} = -\frac{kq\varepsilon}{a}\sin\beta,$$

$$Y = 0,\ R = X,\ \varphi = 0,$$

worin $PB_1 = PB_2 = c$, $\angle OPB_1 = \angle OPB_2 = \beta$ genommen ist. Der Abstand des Punktes Q von P ist also dann die mittlere Proportionale zu a und c.

Aufgabe 128. Ueber dem Mittelpunkte einer materiellen Kreislinie, deren Radius a ist, deren Dichtigkeit ε und deren Querschnitt q constant sind, liegt ein Punkt P in dem senkrecht zur Kreisebene gemessenen Abstande c. Seine Masse ist $= 1$. Er erleidet von der Kreislinie eine Anziehung A nach dem Newton'schen Gesetze. I. Wie gross ist dieselbe? II. Wo müsste die gesammte Masse der Linie in einem Punkte Q vereinigt sein, um dieselbe Wirkung auszuüben, wie bei ihrer Vertheilung längs derselben,

Lösung. I. Auf dieselbe Weise wie in den Lösungen der beiden vorigen Aufgaben findet man

$$A = 2\pi\frac{akcq\varepsilon}{\sqrt{a^2+c^2}^3},$$

oder, wenn mit m die Masse der Kreislinie bezeichnet wird,

$$A = \frac{kcm}{\sqrt{a^2+c^2}^3}.$$

II. Der gesuchte Punkt Q liegt auf der Geraden, welche P mit dem Kreismittelpunkte verbindet, in der Entfernung

$$r = \sqrt[4]{\frac{(a^2+c^2)^3}{c^2}}$$

von P.

Aufgabe 129. Die homogene, gleichdicke materielle Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

wirkt anziehend auf einen Punkt, der sich im Coordinatenanfange befindet und die Masse 1 hat. Ihr Querschnitt ist q, ihre Dichtigkeit ε. Die Anziehung erfolgt proportional der Masse und der Entfernung. Wie gross ist dieselbe und wie lässt sie sich durch die Ordinate des Schwerpunktes ausdrücken?

Lösung. Da die Kettenlinie symmetrisch gegen die y-Achse liegt, so heben sich die parallel zur x-Achse wirkenden Componenten auf. Als Anziehung in der Richtung der positiven y ergiebt sich zunächst

$$Y = \tfrac{1}{2}\varkappa k q \varepsilon\left[\frac{k}{2}\left(e^{2\frac{x}{k}} - e^{-2\frac{x}{k}}\right) + 2x\right],$$

worin $\varkappa$ den Anziehungscoefficienten bedeutet. Wird der von 0 bis x gerechnete Kettenlinienbogen mit s bezeichnet, so lässt sich dies eleganter in der Form

$$Y = \varkappa q \varepsilon (sy + kx)$$

darstellen.

Da ferner, nach Aufgabe 51, die Schwerpunktsordinate η den Werth $\frac{sy + kx}{2s}$ hat, so ist auch

$$Y = 2\varkappa q \varepsilon s \eta,$$

oder, wenn die Masse der Kettenlinie m genannt wird,

$$Y = \varkappa m \eta.$$

B. Anziehung der Flächen.

Aufgabe 130. Wie gross ist die Anziehung A, welche eine homogene, materielle Kreisfläche vom Radius a, der Dichtigkeit ε und der constanten Dicke δ, nach dem Newton'schen Gesetze auf einen Punkt von der Masse 1 ausübt, der senkrecht über ihrem Mittelpunkte in der Entfernung c liegt?

Lösung. Wird ein Kreisdurchmesser als Achse, der Mittelpunkt als Pol eines Polarcoordinatensystems genommen, der Radius-

vector irgend eines Flächenpunktes mit r, die zugehörige Anomalie mit θ bezeichnet, so ist die Anziehung, welche das daselbst liegende Flächenelement ausübt

$$dR = \frac{k\varepsilon\delta r\, d\theta\, dr}{c^2 + r^2}.$$

Dieselbe giebt in der Ebene der Scheibe eine Componente, welche aufgehoben wird; senkrecht zur Scheibe eine andere

$$dA = \frac{k c \delta \varepsilon r\, d\theta\, dr}{\sqrt{c^2+r^2}^{\,3}}.$$

Hieraus folgt

$$A = 2\pi k c \delta \varepsilon \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\right),$$

oder, wenn man den Abstand des angezogenen Punktes vom Rande der Scheibe mit b bezeichnet,

$$A = 2\pi k c \delta\, \varepsilon \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

Aufgabe 131. Die homogene, materielle Fläche ACB (Fig. 15) der Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

zieht einen im Coordinatenanfange befindlichen Punkt von der Masse 1 proportional der Entfernung und der Masse an. Die Dichtigkeit ist $= \varepsilon$, die Dicke der Fläche constant $= \delta$.

Man soll die Grösse der Anziehung bestimmen und angeben, wie sich dieselbe durch die Ordinate η des Flächenschwerpunktes ausdrücken lässt.

Lösung. Die parallel zur x-Achse wirkenden Componenten heben sich auf. Für die Anziehung in der Richtung der y-Achse ergiebt sich

$$Y = \tfrac{1}{8}\,\varkappa\,\varepsilon\,\delta \left[8ab^2 - 4ak^2 - k^3\left(e^{2\frac{a}{k}} - e^{-2\frac{a}{k}}\right)\right],$$

worin $\varkappa$ dieselbe Bedeutung hat, wie in Aufgabe 129.

Wird mit s die Länge des Bogens $AC = CB$ bezeichnet, so hat man besser

$$Y = \tfrac{1}{2}\,\varkappa\,\varepsilon\,\delta\,[2ab^2 - k(ak + bs)].$$

Da die Ordinate η des Schwerpunktes der Fläche ACB den Werth

$$\eta = \frac{2ab^2 - k(bs + ak)}{4(ab - ks)}$$

hat, was leicht aus dem in II. unter Aufgabe 61 Dagewesenen folgt, so ist auch

$$Y = 2\varkappa\varepsilon\delta\,(ab - ks)\,\eta,$$

oder, wenn man die Masse der Fläche ACB mit m bezeichnet,

$$Y = \varkappa m \eta.$$

Aufgabe 132. Eine materielle Kugelfläche vom Radius a, deren Dichtigkeit ε und Dicke δ constant sind, wirkt anziehend auf einen Punkt P von der Masse 1, welcher sich im Abstande $c > a$ vom Mittelpunkte O befindet. Die Anziehung erfolgt proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Es wird verlangt, die Intensität derselben zu ermitteln.

Lösung. Wir beziehen die Kugelfläche und den Punkt P auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x-Achse OP und dessen Anfang O ist. Dann ergiebt sich für die Anziehung, welche die ganze Kugelfläche auf P ausübt, zunächst der Ausdruck

$$X = -2ak\delta\varepsilon \int_{-a}^{+a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{(c-x)\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\sqrt{a^2+c^2-2cx}^{\,3}},$$

worin k der Anziehungscoefficient.

Durch Ausführung der Integrationen folgt hieraus

$$X = -\frac{k\,(4\pi a^2\delta\varepsilon)}{c^2},$$

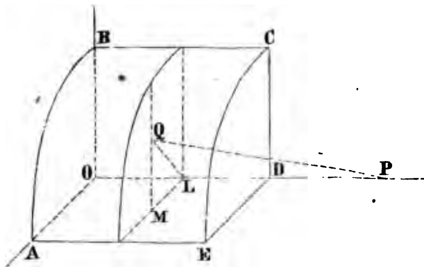
die Anziehung ist also eben so gross, als wenn die gesammte Masse der Kugelfläche in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Dasselbe ergiebt sich bei Anwendung von Polarcoordinaten.

C. Anziehung der Körper.

Aufgabe 133. Ein Punkt P, welcher auf der Achse eines homogenen, geraden Kreiscylinders liegt, wird von diesem proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angezogen. Der Radius des Cylinders ist $= r$, die Höhe $= h$, die Dichtigkeit ε, der Abstand des Punktes P von der Cylinderbasis $= a$. Gefragt wird nach der Grösse der Anziehung, I. wenn der angezogene Punkt oberhalb der Deckfläche, II. wenn er in derselben liegt, III. wenn er sich innerhalb der Cylindermasse befindet. Ferner

Fig. 21.



wird die Beantwortung der unter I. und II. gestellten Fragen für den Fall eines **unendlich langen** Cylinders verlangt.

Lösung. I. Benutzt man cylindrische Coordinaten in der durch Fig. 21 angedeuteten Weise, indem man einen beliebigen Massenpunkt Q durch $OL = x$, $LQ = r$ und $\angle MLQ = w$ bestimmt, so ergiebt sich für die Anziehung, welche P erleidet,

$$A = -k\varepsilon \int_0^h \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{(a-x)\, r\, dx\, dr\, dw}{\sqrt{(a-x)^2 + r^2}^3}$$

Dies liefert

1) $$A = -2\pi k\varepsilon \left(h + \sqrt{(a-h)^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right),\ a \geq h,$$

was so viel wie

$$A = -2\pi k\varepsilon \left(\overline{BC} + \overline{CP} - \overline{BP}\right)$$

ist.

II. Liegt der angezogene Punkt auf der Deckfläche, so hat die Anziehung die Grösse

2) $$A = -2\pi k\varepsilon \left(h + c - \sqrt{h^2 + c^2}\right).$$

III. Befindet er sich innerhalb der Cylindermasse und wird der Abstand von der Grundfläche mit h_1, der von der Deckfläche mit h_2 bezeichnet, so ist

3) $$A = 2\pi k\varepsilon \left(h_2 - h_1 - \sqrt{h_2^2 + c^2} + \sqrt{h_1^2 + c^2}\right).$$

IV. Für $h = \infty$ liefert die Gleichung 1), wenn man erst $a = h + a_1$ setzt und dann den binomischen Satz anwendet,

4) $$A = -2\pi k\varepsilon \left(\sqrt{a_1^2 + c^2} - a_1\right).$$

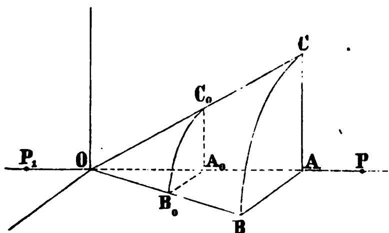
Eben so erhält man aus 2)

5) $$A = -2\pi k\varepsilon c.$$

Aufgabe 134. I. Wie gross ist die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgende Anziehung, welche ein gerader, homogener **Kreiskegel** von der Höhe $OA = h$, dem Basisradius b und der Dichtigkeit ε auf einen Punkt P von der Masse 1 ausübt, der auf seiner Achse, unterhalb der Grundfläche, in der Entfernung $a > h$ von der Spitze liegt?

II. Welchen Werth hat dieselbe, wenn der angezogene Punkt sich im Basismittelpunkte befindet?

Fig. 22.



Lösung. I. Wird die Kegelspitze als Anfang der Abscissen, die Kegelachse als x-Achse genommen und ein beliebiger Punkt der Kegel-

[illegible] Lösung der vorigen Aufgabe, durch die Coordinaten [illegible] entnimmt, so dass man für die Gesammtanziehung, welche [illegible] ausgeübt wird,

$$A = [illegible] \int \int \int \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

Unter Anwendung bekannter Integralformeln folgt hieraus

$$A = 2\pi k \varepsilon h \left\{ [illegible] - 1 \right\},$$

worin [illegible] die Länge der Kegelseite, [illegible] den Abstand des angezogenen Punktes von der Peripherie der Basis und k, wie gewöhnlich, den Anziehungscoefficienten bedeutet.

II. Wenn P mit dem Grundflächenmittelpunkte zusammenfällt, so ist einfacher

$$A = 2\pi k \varepsilon h \left\{ [illegible] - 1 \right\}.$$

Aufgabe 135. Wie Aufgabe 134 I; doch liegt der angezogene Punkt P_1 oberhalb der Kegelspitze in der Entfernung a von der Basis. (Fig. 22.)

Lösung. Auf dieselbe Weise, wie in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe, gelangt man hier zu dem Resultate

$$A = 2\pi k \varepsilon h \left\{ 1 - \frac{h}{s^2} \left[\frac{s^2 \cdot i}{hs} \, l \, \frac{s^2 + ah - cs}{(h+s)\,d} + c - d \right] \right\},$$

in welchem Ausdrucke d die Entfernung des angezogenen Punktes von der Kegelspitze ist, die übrigen Grössen aber dieselbe Bedeutung haben wie vorher.

Aufgabe 136. Ganz wie Aufgabe 134, nur mit dem Unterschiede, dass der anziehende Kegel ein abgestumpfter ist, welcher aus dem Vollkegel mit der Höhe h entstand, indem man eine Spitze von der Höhe $OA_0 = h_0$ parallel zur Basis abtrennte. (Fig. 22.)

Lösung. Legt man das Coordinatensystem wieder genau so, wie in der Lösung der Aufgabe 134 angegeben worden ist und benutzt die Abkürzungen

$$b^2 + h^2 = s^2,$$
$$(a-h)^2 + b^2 = c^2,$$
$$(a-h_0)^2 h^2 + b^2 h_0^2 = p^2,$$

so ergiebt sich

$$A = 2\pi k \varepsilon \left\{ h_0 - h + \frac{h}{s^2} \left[\frac{ab^2}{s} \, l \, \frac{h(s^2 - ah + cs)}{h_0 \, s^2 - ah^2 + ps} - ch + p \right] \right\}$$

als Werth der gesuchten Anziehung.

Aufgabe 137. Wie Aufgabe 135, doch ist der anziehende Kegel r abgestumpfte $ABC\,A_0B_0C_0$ (Fig. 22), für welchen $OA_0 = h_0$ id OA, wie früher, $= h$. Man verlangt I. die Anziehung A, die auf ausgeübt wird; II. die Grösse derselben für den Fall, dass der anzogene Punkt P_1 mit dem Mittelpunkte A_0 der Deckfläche zusammenlt; III. die Herleitung der Anziehung für den Vollkegel und für den linder, aus den unter I. gefundenen Resultaten.

Lösung. I. Wie in den Lösungen der vorhergehenden Aufgaben ıdet man

$$A = 2\pi k\varepsilon\left\{h - h_0 - \frac{h}{s^2}\left[\frac{(a-h)b^2}{s}\, l\,\frac{h(ah+b^2+cs)}{(a-h)h^2+h_0s^2+ps} + ch - p\right]\right\},$$

orin zur Abkürzung

$$b^2 + h^2 = s^2,$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ und}$$
$$(a - h + h_0)^2 h^2 + b^2 h_0^2 = p^2$$

esetzt ist.

II. Liegt der angezogene Punkt P_1 im Deckflächenmittelpunkte,) ergiebt sich die Grösse der Anziehung aus Gleichung 1), wenn man $= h - h_0$ nimmt.

III. Die für den Vollkegel von der Höhe h geltende Formel folgt, enn $h_0 = 0$ gesetzt wird. Man gelangt dann zu dem in Aufgabe 135 ıgeführten Resultate.

Um ferner den Werth für die Anziehung des Cylinders aus Gleiıung 1) zu erhalten, braucht man nur h, h_0 und a durch die Höhe h_1 s Stumpfes, durch den Abstand $P_1A_0 = \alpha$ (Fig. 22) und durch den eckflächenradius $A_0B_0 = \beta$ auszudrücken und nachher $\beta = b$ zu nehen. Es ergiebt sich dann die Gleichung 1) der Aufgabe 133.

Aufgabe 138. Eine homogene Hohlkugel, deren äusserer Raus r_1, deren innerer r_0 und deren Dichtigkeit ε ist, wirkt nach dem ewton'schen Gesetze anziehend auf einen Punkt P von der Masse 1. s soll berechnet werden, I. wie gross diese Anziehung A ist, wenn r Punkt ausserhalb der Kugel liegt; II. wenn er sich in dem umhlossenen Hohlraume befindet; III. wenn er innerhalb der Kugelasse gelegen ist. Endlich soll man IV. angeben, wie stark anziehend ne massive Kugel auf den Punkt P wirkt, wenn dieser ausserhalb, nerhalb, oder auf der Oberfläche sich befindet.

Lösung. I. Unter Benutzung eines Polarcoordinatensystems, essen Pol der Kugelmittelpunkt ist, findet man leicht

$$A = -\tfrac{4}{3}\cdot\frac{\pi k\varepsilon}{a^2}(r_1^3 - r_0^3) = -\frac{km}{a^2},$$

worin a den Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte, die Masse der Hohlkugel und k den Anziehungscoefficienten bedeutet.

Die Anziehung ist also eben so gross, als sie sein würde, wenn die ganze Masse der Hohlkugel in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre.

II. Ein in dem umschlossenen Hohlraume liegender Punkt erleidet gar keine Einwirkung.

III. Befindet sich der Punkt innerhalb der Masse der Hohlkugel im Abstande $a < r_1$ (aber $> r_0$) vom Mittelpunkte, so wird er so angezogen, als ob nur diejenige Hohlkugel auf ihn wirke, deren äusserer Radius a, deren innerer r_0 ist.

IV. Ist die Kugel massiv, wird ihr Halbmesser mit R, der Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte wieder mit a bezeichnet, so ergeben sich für die Anziehungen leicht die Werthe

$$1) \qquad A = -\tfrac{4}{3}\pi k \varepsilon \frac{R^3}{a^2},$$

$$2) \qquad A = -\tfrac{4}{3}\pi k \varepsilon a,$$

$$3) \qquad A = -\tfrac{4}{3}\pi k \varepsilon R,$$

je nachdem der Punkt ausserhalb der Kugel, innerhalb, oder auf der Oberfläche liegt. Die hierin enthaltenen Sätze sind leicht in Worte zu fassen.

Aufgabe 139. An einer Waage sind zwei Kräfte im Gleichgewichte, von denen die eine (ein Gewicht, dessen Masse μ ist) von der Anziehung der Erde abhängt, die andere (etwa die Elasticität einer Feder) aber nicht.

Man bringt diese Waage über ein homogenes Erzlager, dessen Dichtigkeit E ist und welches in die Form eines Kreiscylinders vom Radius r und der Höhe (Tiefe) h so in der oberen Schicht der Erde liegt, dass der Mittelpunkt der Cylinderdeckfläche mit dem Mittelpunkte von μ zusammenfällt.

Es soll I. ermittelt werden, wie sich die Anziehung A', die das Gewicht dann erleidet, zu derjenigen, A, verhält, welche es erleiden würde, wenn die ganze Erde, die als vollkommene Kugel vom Radius R angesehen werden möge, die gleichförmige Dichtigkeit $\varepsilon = 5{,}6$ hätte; II. soll bestimmt werden, wie gross das Verhältniss $\frac{A'}{A}$ für den Fall ist, dass E die Dichtigkeit des Quecksilbers $= 14$, $r =$ eine halbe Stunde $= 6000'$, $h = 100'$ und dass $R = 860$ Meilen $= 860 \,.\, 24000'$ angenommen wird.

Lösung. Die Anziehung der gleichförmig dichten Erde auf die Masse μ an ihrer Oberfläche ist

$$A = \tfrac{4}{3}\pi k \mu \varepsilon R$$

(vergl. vorige Aufgabe).

Denkt man sich nun den oben angegebenen Cylinder herausgenommen und den entstandenen Hohlraum mit der dichteren Erzmasse ausgefüllt, so hat man für die neue Anziehung (nach Aufgabe 133)

$$A' = \tfrac{4}{3}\pi k \mu \varepsilon R + 2\pi k \mu \left(h + r - \sqrt{h^2 + r^2}\right)(E - \varepsilon);$$

mithin ist

$$\frac{A'}{A} = 1 + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{E - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{h + r - \sqrt{h^2 + r^2}}{R}.$$

II. Für die in der Aufgabe vorgeschriebenen Zahlenwerthe folgt hieraus

$$\frac{A'}{A} = 1 + \frac{1}{92501},$$

d. h. das Uebergewicht beträgt so viel, als wäre die in der einen Waagschale liegende Masse μ um $\frac{1}{92501}$ vermehrt worden.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort zum zweiten Theile.

Der erste Theil der vorliegenden Schrift hat in den Kreisen, für welche er bestimmt war, und von Seiten der Presse* eine so günstige Aufnahme gefunden, dass wohl auch der zweite auf solche hoffen darf. Sein Erscheinen ist leider dadurch, dass ich krank war, verzögert worden.

In den Aufgaben und Lösungen ist immer, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, $y' = \frac{dy}{dx}$, $r' = \frac{dr}{d\theta}$, q ein constanter Querschnitt, ε die unveränderliche Dichtigkeit, δ die constante Dicke einer Fläche, t die vom Anfange der Bewegung aus gezählte Zeit, θ (im Vten Capitel) der von der Anfangslage aus gerechnete Drehwinkel, M die Masse. Letztere wurde jedoch bei den Aufgaben der ersten drei Capitel stets gleich 1 vorausgesetzt.

Die Bestimmung u. s. w. des Buches anlangend, verweise ich auf die empfehlende Vorrede, mit welcher mein hochverehrter Lehrer, der Herr Hofrath Prof. Dr. Schlömilch, den ersten Theil beehrt hat.

Sofortige briefliche Mittheilungen über etwaige Mängel werden mich stets zu aufrichtigem Danke verpflichten.

Dresden, im April 1871.

A. Fuhrmann.

---

* Literarisches Centralblatt, Jahrgang 1868; Grunert's Archiv für Mathematik und Physik, B. 49; Allgemeine Literaturzeitung, Jahrg. XV; Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrg. XIII; etc.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

DR. ARWED FUHRMANN,

AUSSERORDENTL. PROFESSOR AM KÖNIGL. POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

MIT EINEM VORWORTE

VON

DR. O. SCHLÖMILCH,

KÖNIGL. SÄCHS. HOFRATH, PROFESSOR ETC. ETC.

IN ZWEI THEILEN.

2

ZWEITER THEIL:

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN DYNAMIK FESTER KÖRPER.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1871.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

Dr. ARWED FUHRMANN,

AUSSERORDENTL. PROFESSOR AM KÖNIGL. POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

MIT EINEM VORWORTE

VON

Dr. O. SCHLÖMILCH,

KÖNIGL. SÄCHS. HOFRATH, PROFESSOR ETC. ETC.

IN ZWEI THEILEN.

ZWEITER THEIL:

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN DYNAMIK FESTER KÖRPER.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1871.

Capitel I.

Aufgaben über die geradlinige Bewegung eines freien Punktes.

Erklärung. Bezeichnet v die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes, s den von ihm zurückgelegten geradlinigen Weg, der von irgend einer bestimmten Anfangsstelle an gerechnet wird, ist ferner Q die auf die Masseneinheit des Punktes wirkende Kraft, endlich t die von einem bestimmten Augenblicke an gezählte Zeit, so gelten bekanntlich die Beziehungen

$$1) \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

und

$$2) \qquad Q = \frac{dv}{dt}.$$

Die Letzte derselben lässt sich auch in den Formen

$$3) \qquad Q = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

und

$$4) \qquad Q = v\frac{dv}{ds}$$

darstellen.

Hierbei gilt Q für positiv, wenn es die Geschwindigkeit v zu vergrössern strebt; im entgegengesetzten Falle für negativ.

Hat der sich bewegende Punkt nicht die Masse 1, sondern die Masse m, so ist die Kraft, welche die Geschwindigkeit v erzeugt, gleich $m\frac{dv}{dt}$. Sie wird bewegende Kraft genannt, während die auf die Masseneinheit wirkende beschleunigende Kraft heisst.

A. Gegeben eine Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft Q und der Zeit t; einschliesslich: Q constant.

Aufgabe 1. Ein Punkt bewegt sich in Folge der Einwirkung einer Kraft, welche proportional der Zeit zunimmt und zur Zeit 1 die Beschleunigung k ertheilt (also z. B. in Folge des Gewichtes einer Wassermenge, die sich durch Zufluss gleichmässig vermehrt). Die Bewegung beginnt mit der Anfangsgeschwindigkeit c und erfolgt in einem nicht widerstehenden Mittel.

Wie gross sind nach der Zeit t die Geschwindigkeit v und der zurückgelegte Weg s?

Lösung. Die Gleichungen 1) und 2) der vorstehenden Erklärung liefern

$$v = c + \tfrac{1}{2} kt^2$$

und

$$s = et + \tfrac{1}{6} kt^3.$$

Aufgabe 2. In einem widerstehenden Mittel bewegt sich zur Zeit 0 von der Stelle A (Fig. 1) aus ohne Anfangsgeschwindigkeit ein Punkt in Folge einer Anziehung nach einem festen Centrum C, welches im Abstande $AC = a$ sich befindet.

Fig. 1.



Die auf ihn wirkende beschleunigende Kraft (einschliesslich des Mittelwiderstandes) ist zu jeder Zeit t

$$1) \qquad Q = a \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha t} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t),$$

wobei a, α und β constante Grössen sind.

Es soll ermittelt werden:

I. wie gross die Geschwindigkeit v des Punktes zur Zeit t ist;

II. in welcher Entfernung y er sich zu dieser Zeit vom Centrum C befindet;

III. ob seine Bewegung identisch ist mit einer solchen, welche entsteht, wenn das Centrum C proportional der Entfernung anzieht und das Mittel proportional der Geschwindigkeit widersteht, oder, was dasselbe ist, wenn er sich in einer central durchbohrten Kugel in jenem Mittel bewegt.

Lösung. Man findet

$$2)\qquad v = a\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

und

$$3)\qquad y = \frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t).$$

Nun gilt aber, wenn der Punkt sich in einer central durchbohrten Kugel bei obigem Widerstande bewegt, für die beschleunigende Kraft die Gleichung (siehe Aufg. 138 des ersten Theiles)

$$Q = ky - k_1 v,$$

in welcher k und k_1 Constanten sind. Da 1) unter Beachtung von 2) und 3) leicht auf die Form

$$Q = (\alpha^2+\beta^2)y - 2\alpha v$$

gebracht werden kann, so erhellt, dass die in der Aufgabe vorgeschriebene Bewegung wirklich mit der in einer durchbohrten Kugel identisch ist und zwar mit derjenigen, bei welcher k und k_1 die Werthe $\alpha^2+\beta^2$, bezüglich 2α, haben.

Aufgabe 3. Es soll mittelst der Gleichungen 1) bis 4) der vorstehenden Erklärung der im luftleeren Raume senkrecht nach unten erfolgende Wurf untersucht werden und zwar unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Schwere.

Lösung. Wird die Anfangsgeschwindigkeit mit c bezeichnet und die Zeit t vom Beginne der Bewegung an gezählt, so liefern die genannten Differentialgleichungen

$$v = c + gt$$

für die erlangte Geschwindigkeit,

$$s = ct + \tfrac{1}{2}gt^2$$

für den durchflogenen Weg und, wenn c gleich Null ist,

$$v = \sqrt{2gs}.$$

Diese sehr bekannten Resultate werden für später folgende Aufgaben wieder gebraucht.

Aufgabe 4. Wie Nr. 3, doch erfolgt der Wurf vertical aufwärts.

Lösung. Hier ergiebt sich

$$v = c - gt,$$
$$s = ct - \tfrac{1}{2} g t^2,$$
$$s = \frac{c^2 - v^2}{2g}.$$

Man sieht hieraus, dass in dem Augenblicke $T = \frac{c}{g}$ der aufwärts geworfene Körper die Geschwindigkeit 0 besitzt und das Herabfallen anfängt; ferner, dass die erstiegene Höhe $S = \frac{c^2}{2g}$ ist, also (nach der Lösung der vorigen Aufgabe) eben so gross wie diejenige, aus welcher er herabfallen müsste, um seine Anfangsgeschwindigkeit c zu erlangen.
Die beim Aufsteigen vorliegenden Geschwindigkeiten sind den entsprechenden beim darauf folgenden Herabfallen überall gleich.

Aufgabe 5. Das Abwärtsrollen auf der schiefen Ebene (ohne Anfangsgeschwindigkeit und ohne Widerstände) soll untersucht werden.

Lösung. Es ist, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen die Ebene mit dem Horizonte bildet,

$$v = gt \sin \alpha$$

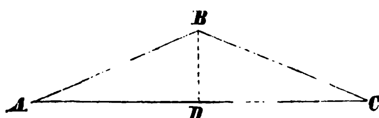
und

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin \alpha.$$

Die Geschwindigkeit, welche der Punkt erlangt, indem er die ganze Länge L der schiefen Ebene herabrollt, ist hiernach gleich $\sqrt{2gL \sin \alpha}$, mithin eben so gross wie diejenige, die er erwerben würde, wenn er ihre ganze Höhe vertical herabfiele.

Aufgabe 6. Ein Dach ABC (Fig. 2), von gegebener Spannweite $2b$, soll so construirt werden, dass das Regenwasser in der kürzesten Zeit auf demselben herabfliesst. Unter welchem Winkel $\alpha = BAD$ müssen die Sparren gegen den Horizont geneigt werden?

Fig. 2.



Lösung. Mit Benutzung der Lösung der vorigen Aufgabe findet man leicht, dass α gleich 45 Grad sein muss.

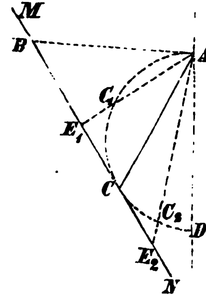
Aufgabe 7. Von dem obersten Punkte A eines verticalen Kreisdurchmessers AB ist eine Sehne AC nach einem beliebigen Peripheriepunkte gezogen; von hier aus eine zweite nach dem untersten Punkte B.

Es soll bestimmt werden, in welchem Verhältnisse die Zeiten t_1, t_2 und t_3 zu einander stehen, in denen AC, CB und AB von einem schweren Punkte durchlaufen werden.

Lösung. Man findet leicht, $t_1 = t_2 = t_3$. Es wird also jede der Sehnen in derselben Zeit durchlaufen wie der Durchmesser.

Aufgabe 8. Mit einer gegebenen Rinne MN (Fig. 3) soll ein vorgeschriebener Punkt A durch eine andere Rinne AC so verbunden werden, dass ein in der letzteren ohne Widerstand herabrollender schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von A nach MN gelangt. Die Lage der Rinne AC ist mit Benutzung der Lösung der vorigen Aufgabe zu bestimmen.

Fig. 3.



Lösung. Die Stelle C, an welcher die Rinne AC einmünden muss, ergiebt sich, indem man AB horizontal zieht und $BC = BA$ nimmt. Dass AC dann wirklich in der kürzesten Zeit durchrollt wird, übersieht man leicht, wenn man beachtet, dass alle von A aus gezogenen Sehnen des in C die Rinne MN berührenden Halbkreises $A\,C_1\,C\,C_2\,D$ in gleich langen Zeiten durchfallen werden, wie die Lösung der vorigen Aufgabe lehrt.

Aufgabe 9. Bei der ohne Geschwindigkeit beginnenden Bewegung eines Punktes hängt die vom Anfange an gezählte Zeit t mit der beschleunigenden Kraft Q zusammen durch die Gleichung

$$t = \frac{1}{k} \arccos \frac{Q}{ak^2},$$

in welcher a und k Constanten sind.

Es soll berechnet werden, wie gross die Geschwindigkeit v des Punktes in dem Augenblicke t ist; welchen Weg s er bis zu diesem Momente durchlaufen hat; wie die beschleunigende Kraft mit diesem Wege zusammenhängt und ob die Bewegung ebenso erfolgt, wie wenn der Punkt in der centralen Bohrung einer homogenen Kugel vom Radius a nur in Folge der Anziehung derselben sich bewegt und zwar von der Oberfläche aus, zur Zeit 0, ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Lösung. Die Gleichungen 1) und 2) der Erklärung liefern

$$v = ak \sin kt,$$

$$s = a(1 - \cos kt) = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2} kt.$$

Hiernach ist

$$Q = k^2 (a - s).$$

Wirkt auf den Punkt nichts weiter als die Anziehung der in der Aufgabe genannten Kugel, so unterliegt er in der Entfernung s von der Oberfläche (nach Nr. 138 des ersten Theiles) der beschleunigenden Kraft $K^2 (a - s)$. Wenn also die Constanten K und k gleich sind, so sind es auch die beiden Bewegungen.

B. Gegeben eine Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft Q und dem durchlaufenen Wege s.

Aufgabe 10. Eine materielle Gerade AB (Fig. 4) von der endlichen Länge b wirkt anziehend auf einen Punkt P, welcher in ihrer Richtung liegt, aber ausserhalb ihrer Masse. Der Querschnitt der Geraden ist constant gleich q; die Dichtigkeit derselben ebenfalls constant und zwar gleich ε. Der angezogene Punkt befindet sich zur Zeit 0 von dem Endpunkte B in dem Abstande $BO = a$. Die Anziehung erfolgt nach dem Newton'schen Gesetze, also proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Die Bewegung beginnt von O aus ohne Anfangsgeschwindigkeit und geht unter alleiniger Wirkung der Anziehung der Geraden vor sich. Man soll berechnen, welche Geschwindigkeit v der Punkt erlangt hat nach Durchlaufung des Weges s; mit welcher (v_1) er im Halbirungspunkte der Strecke BO und mit welcher (v_2) er in B anlangt.

Fig. 4.



Lösung. Wenn sich der Punkt im Abstande y von B befindet, so ist (nach der Lösung der Aufgabe 126 des ersten Theiles, die Anziehung, welche die Gerade auf ihn ausübt,

$$A = \frac{k b q \varepsilon}{y (b + y)}.$$

Hieraus folgt durch Benutzung der Gleichung 4) der Erklärung, dass in dieser Entfernung die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2c}{b} l \frac{a (b + y)}{(a + b) y}}$$

vorliegen muss, in welchem Ausdrucke c die Abkürzung für $k b q \varepsilon$ ist. Die, mit welcher er in der Mitte von OB anlangt, ist hiernach

$$v_1 = \sqrt{\frac{2c}{b} l \frac{a+2b}{a+b}},$$

und diejenige, mit der er in B ankommt, ist unendlich gross.

Aufgabe 11. Wie Nr. 10, doch soll sich die anziehende Gerade (Fig. 4) von B nach A zu ins Unendliche erstrecken.

Lösung. Im Abstande y von B ist die Anziehung, welche der Punkt erleidet,

$$A = \frac{c}{y},$$

wobei $c = kq\varepsilon$.

Diess giebt für die Geschwindigkeit daselbst

$$v = \sqrt{2cl\frac{a}{y}}.$$

Sie nimmt also stets zu, erreicht im Halbirungspunkte der Strecke BO den Werth

$$v_1 = \sqrt{2cl2}$$

und ist unendlich gross, wenn der Punkt in B anlangt.

Aufgabe 12. Ueber dem Mittelpunkte C einer materiellen Kreislinie, deren Radius a ist, deren Dichtigkeit ε und deren Querschnitt q constant sind, befindet sich zur Zeit 0 ein Punkt P in dem (senkrecht zur Kreisebene gemessenen) Abstande c in Ruhe. Er wird von der Kreislinie nach dem Newton'schen Gesetze angezogen.

Man soll bestimmen, welche Geschwindigkeit (v) dieser Punkt P besitzt, wenn er sich im Abstande y von C befindet, mit welcher (v_1) er durch C hindurch geht und was aus den Werthen von v und v_1 für die Natur der Bewegung folgt.

Lösung. Die beschleunigende Kraft ergiebt sich unter Benutzung der Lösung der Aufgabe 128 des ersten Theiles. Sodann erhält man

$$v = \pm\sqrt{2B\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)},$$

wobei $B = 2\pi akq\varepsilon$.

Hieraus geht hervor, dass die Bewegung eine schwingende ist und zwar eine solche, bei welcher in C die (grösste) Geschwindigkeit

$$v_1 = \pm\sqrt{2B\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

herrscht, wobei b den ursprünglichen Abstand des Punktes P von der Kreislinie bezeichnet.

Aufgabe 13. Wie Aufgabe 12; nur geschieht die Anziehung dur eine materielle Kreisfläche vom Radius a, der constanten Dichtigkeit ε und Dicke δ.

Gesucht wird die Geschwindigkeit v des Punktes im Abstande vom Centrum und derjenige Werth, welchen sie an letzterer Stelle erreicht hat.

Lösung. Wie in den vorhergehenden Lösungen erhält man (unter Benutzung von Nr. 130 des ersten Theiles)

$$v = K\sqrt{(\sqrt{a^2+y^2}-y)-(\sqrt{a^2+c^2}-c)},$$

worin K die Abkürzung für $2\sqrt{\pi k \delta \varepsilon}$ ist.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt im Centrum anlangt ist also

$$v_1 = K\sqrt{a-b+c},$$

wenn mit b sein ursprünglicher Abstand von dem Kreisumfange bezeichnet wird.

Aufgabe 14. Auf der Achse eines homogenen, geraden, unendlich langen Kreiscylinders befindet sich anfänglich ein Punkt im Abstande a von der Deckfläche in Ruhe. Der Cylinder zieht ihn nach dem Newton'schen Gesetze an, hat den Radius c und die Dichtigkeit ε.

Man soll berechnen, wie gross im Abstande y von der Deckfläche die Geschwindigkeit v ist und mit welcher (v_1) der Punkt am Cylinder ankommt.

Lösung. Mit Benutzung von Nr. 133 des ersten Theiles ergiebt sich

$$v = K\sqrt{(ab-uy)+c^2\,l\frac{a+b}{u+y}+(y^2-a^2)}$$

und

$$v_1 = K\sqrt{ab+c^2\,l\frac{a+b}{c}-a^2},$$

in welchen Ausdrücken $K=\sqrt{2\pi k\varepsilon}$, $b=\sqrt{a^2+c^2}$, $u=\sqrt{c^2+y^2}$.

Aufgabe 15. In einer central durchbohrten, massiven, homogenen Kugel bewegt sich ein Punkt unter alleiniger Wirkung der Anziehung welche nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt. Die Bewegung beginnt von der Oberfläche aus ohne Anfangsgeschwindigkeit. Wie gross sind zur Zeit t die Geschwindigkeit v, die Mittelpunktsentfernung x und welcher Art ist die Bewegung?

Lösung. Die Beschleunigung, welche die Kugelanziehung ertheilt, ist nach der Lösung der Aufgabe 138 des ersten Theiles bekannt. Mit Einführung derselben erhält man zunächst

$$v = \pm K\sqrt{a^2 - x^2},$$

wobei $K^2 = \frac{4}{3}\pi k \varepsilon$, k der bekannte Anziehungscoefficient und a der Kugelradius. Dann folgt

$$x = a \cos Kt,$$
$$v = aK \sin Kt.$$

Hiermit erkennt man die Bewegung als eine periodische. Die Zeiten, zu welchen sich der Punkt an der Kugeloberfläche befindet, sind 0, $\frac{\pi}{K}$, $2\frac{\pi}{K}$, $3\frac{\pi}{K}$ u. s. f.; die, zu welchen er durch das Centrum geht, $\frac{\pi}{2K}$, $3\frac{\pi}{2K}$ u. s. w., also unabhängig von der Grösse des Radius. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Mittelpunkt durchlaufen wird, ist $\pm aK$.

Aufgabe 16. Ein Punkt, welcher sich im Abstande a von der Erdmitte befindet, fällt im luftleeren Raume. Da a, verglichen mit dem Erdhalbmesser r, sehr gross ist, so muss auf die Veränderlichkeit der Schwere Rücksicht genommen werden. Man soll für den ausserhalb der Erde stattfindenden Fall berechnen

I. wie gross die Geschwindigkeit v ist, welche der Punkt erlangt hat, nachdem von ihm der Raum s durchfallen wurde und mit welcher Geschwindigkeit V er an der Erdoberfläche ankommt, wenn seine Bewegung von der Ruhe aus beginnt;

II. in welcher Zeit t er die Höhe s durchfällt und wie viel Zeit T er braucht, um bis zur Erde zu gelangen;

III. welche Geschwindigkeit er zur Zeit t erreicht hat und welchen Weg er während dieser Zeit durchfällt.

Lösung.

I. So lange sich der Punkt ausserhalb der Erde befindet, ist die Anziehung, welche er erleidet (Nr. 138, IV, im ersten Theile), umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung, nämlich

$$1) \qquad Q = g\frac{r^2}{(a-s)^2}.$$

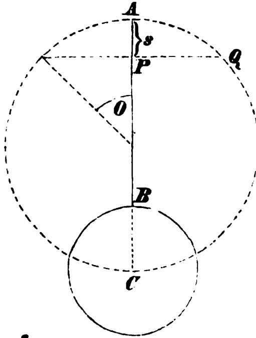
Hieraus folgt ohne Schwierigkeit

$$2) \qquad v = r\sqrt{2g\frac{s}{a(a-s)}}$$

und

3) $$V = \sqrt{2gh \cdot \frac{r}{r+h}},$$

Fig. 5.



wenn mit h die ganze durchfall
bezeichnet wird. Kann h geg
nachlässigt werden, so liefert
Gleichung die sehr bekannte (v
gabe 3, Gleichung 3)

$$V_1 = \sqrt{2gh}.$$

Es ist also die Geschwin
immer kleiner als diejenige (V
erlangt wird, wenn die Schw
all so gross ist, wie an der
fläche.

II. Bei Bestimmung der Zeit t kommt man auf die Di
gleichung

$$\sqrt{\frac{a-s}{s}}\, ds = r \sqrt{\frac{2g}{a}}\, dt.$$

Für die Integration derselben empfiehlt sich die Einführ
Hilfswinkels θ mittelst der Substitution

4) $$s = a \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Sie liefert

5) $$a - s = a \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta,$$

was sich, als $a - s = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\theta$, in Fig. 5 leicht geometris
lässt. Nach Ausführung der Integration entsteht

6) $$t = k(\theta + \sin\theta),$$

wobei

7) $$k = \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{2g}}.$$

Aus 4) und 5) folgen $\sin \frac{1}{2}\theta$ und $\cos \frac{1}{2}\theta$. Damit hat r
$\sin\theta$ und erhält

8) $$t = k\left[\frac{2}{a}\sqrt{s(a-s)} + \arcsin \frac{2}{a}\sqrt{s(a-s)}\right],$$

was auch in der Form

$$9) \qquad t=\frac{2k}{a}\left[\sqrt{s(a-s)}+\frac{a}{2}\,arccos\,\frac{a-2s}{a}\right]$$

gegeben werden kann.

Die Zeit, in welcher der Punkt bis zur Erdoberfläche herabfällt, ist hiernach

$$10) \qquad T=\frac{2k}{a}\left[\sqrt{(a-r)r}+\frac{a}{2}\,arccos\,\frac{2r-a}{a}\right].$$

III. Will man für einen bestimmten Augenblick t die Geschwindigkeit und die durchfallene Höhe haben, so muss man aus der transcendenten Gleichung 6) zunächst θ berechnen. Hat man dieses, so ist s durch 4) und 5) bekannt; dann aber auch v durch Gleichung 2).

Aufgabe 17. Mit welcher Geschwindigkeit c_0 muss ein Körper (Punkt von der Masse 1) vom Monde aus nach der Erde geworfen werden, wenn er bis an diejenige Stelle zwischen beiden Himmelskörpern gelangen soll, an welcher die Anziehungen beider gleich sind, bei deren geringster Ueberschreitung er also nicht auf den Mond zurück, sondern auf die Erde fällt?

Gegeben wird Folgendes:

Mondmasse $\mu = \frac{1}{81}$ der Erdmasse m;
Mondradius $\varrho = \frac{3}{11}$ des Erdradius r;
Abstand der Mittelpunkte $e = 60r$;
Erdhalbmesser $r = \frac{20000000}{\pi}$ Meter;
Anziehung der Erde auf die Masse 1 an ihrer Oberfläche: $g = 9{,}809$ Meter.

Lösung. Für die Beschleunigung, welche der Körper erleidet, nachdem er sich um s von der Mondoberfläche entfernt hat, findet man, weil das Newton'sche Gesetz gilt,

$$Q=\frac{km}{(e-\varrho-s)^2}-\frac{k\mu}{(\varrho+s)^2}.$$

Die nach 4) der Erklärung hieraus folgende Differentialgleichung liefert

$$\tfrac{1}{2}(c^2-v^2)=k\left(\frac{m}{e-\varrho}+\frac{\mu}{\varrho}-\frac{m}{e-z}-\frac{\mu}{z}\right),$$

wobei $z=\varrho+s$ und c die Anfangsgeschwindigkeit.

Diess giebt schliesslich

$$c_0=2275 \text{ Meter.}$$

Aufgabe 18. Eine Kraft, welche umgekehrt proportio dritten Potenz der Entfernung abstösst, hat ihren Sitz in einem Centrum O. Ein im Abstande a befindlicher Punkt A erhält e fangsgeschwindigkeit c in der Richtung von A nach O. Dann er sich offenbar bis zu einer gewissen Stelle B, an welcher er u und rückwärts läuft. Man soll bestimmen:

I. Für die Vorwärtsbewegung (von A nach O zu)

α) die Geschwindigkeit v als Function des Abstandes:

β) den Abstand x als Function der Zeit t;

γ) die Entfernung b des Umkehrpunktes B von O;

δ) die Zeit t_b, welche der Punkt braucht, um von A zu gelangen.

II. Für die Rückwärtsbewegung (von B nach A zu)

α) die Geschwindigkeit w als Function des Abstandes;

β) den Abstand y als Function der Zeit;

γ) desgleichen w ausgedrückt durch die Zeit.

III. Die wichtigsten aus den abgeleiteten Gleichungen s gebenden Folgerungen.

Lösung. I. Ohne Schwierigkeit ergiebt sich für die Vo bewegung

$$1)\qquad v = \frac{\sqrt{(a^2c^2+k^2)x^2-a^2k^2}}{ax} = \frac{\sqrt{\varkappa^2x^2-a^2k^2}}{ax},$$

wobei k^2 die Intensität der abstossenden Kraft für die Einheit d fernung.

Ferner

$$2)\qquad x = \frac{\sqrt{(\varkappa^2t-a^2c^2)^2+a^4k^2}}{a\varkappa};$$

$$3)\qquad b = \frac{ak}{\varkappa};$$

$$4)\qquad t_b = \frac{a^3c}{\varkappa^2}.$$

II. Ebenso folgt für die Rückwärtsbewegung

$$5)\qquad w = \frac{k\sqrt{y^2-b^2}}{by};$$

$$6)\qquad y = \frac{\sqrt{b^4+k^2t^2}}{b};$$

$$7)\qquad w = \frac{k^2t}{b\sqrt{b^4+k^2t^2}}.$$

Hierbei ist die Zeit in I. von dem Augenblicke an gezählt, zu welchem in A die Bewegung beginnt; bei II. aber von dem Momente an, zu welchem in B das Rückwärtslaufen eintritt.

III. Aus diesen Gleichungen ist leicht zu ersehen, dass die Bewegungserscheinungen beim Vorlaufe dieselben sind wie beim Rücklaufe, nur in entgegengesetzter Folge. Die Geschwindigkeit bei der Rückwärtsbewegung nähert sich der Grenze $\frac{k}{b}$, was man sofort erkennt, wenn man in 7) t gleich ∞ nimmt, nachdem man vorher passend umgeformt hat.

Aufgabe 19. Ein beweglicher materieller Punkt wird von einem in der Entfernung a befindlichen Centrum C umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Abstande angezogen. Die Bewegung beginnt ohne Anfangsgeschwindigkeit und endigt in C. Es soll berechnet werden

I. die Geschwindigkeit v des Punktes im Abstande x von C;
II. diejenige (V), mit welcher er in C anlangt;
III. die Zeit t, nach deren Verlauf er um x von C absteht;
IV. die andere (T), zu welcher er daselbst ankommt; endlich
V. diejenige (t_1), um welche er die Geschwindigkeit v_1 besitzt.

Lösung. Bezeichnet k^2 die Intensität der Anziehung im Abstande 1, so ist

$$v = 2k\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{x}},$$

$$V = 2k\sqrt[4]{a},$$

$$t = \frac{2}{3k}(2\sqrt{a} + \sqrt{x})\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{x}},$$

$$T = \frac{4}{3k}\sqrt[4]{a^3},$$

$$t_1 = \frac{12\sqrt{a}\,k^2 - v_1^2}{12k^4}v_1.$$

Aufgabe 20. In einem festen Mittelpunkte M wirkt eine proportional der n^{ten} Potenz der Entfernung anziehende Kraft. Ihre Intensität ist im Abstande 1 gleich k. Ein materieller Punkt, welcher von M um a absteht, besitzt zur Zeit 0 eine nach M gerichtete Anfangsgeschwindigkeit c. Welche Geschwindigkeit v hat er, nachdem er noch um die Strecke x vom Mittelpunkte entfernt ist? Mit welcher (V)

langt er in M an? Wie gross muss sein anfänglicher Abstand a wenn er mit der vorgeschriebenen Geschwindigkeit u in M ei fen soll?

Lösung. Für $n \gtrless -1$ ist

$$v = \sqrt{\frac{2k}{n+1}(a^{n+1} - x^{n+1}) + c^2}$$

und

$$V = \sqrt{\frac{2k}{n+1} a^{n+1} + c^2}.$$

Der bewegliche Punkt muss also den ursprünglichen Abstand

$$a = \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2k}(u^2 - c^2)}$$

haben, wenn er mit der Geschwindigkeit u in M anlangen soll.

Für $n = -1$ hingegen erhält man

$$v = \sqrt{2kl\frac{a}{x} + c^2}$$

und

$$V = \infty.$$

In diesem Falle trifft also der sich bewegende Punkt imme unendlich grosser Geschwindigkeit in M ein, aus welcher Entfer er auch kommen mag.

Aufgabe 21. Zwei frei bewegliche Punkte, deren Massen m züglich n sind, befinden sich anfänglich in dem gegenseitigen stande a in Ruhe und ziehen sich nach dem Newton'schen Gesetz Berechnet soll werden

I. die Zeit t, nach welcher sie die gegenseitige Entfern ($< a$) haben;

II. diejenige (T), um welche sie zusammentreffen;

III. die Grösse ihrer Entfernung z zu einer bestimmten, in S den gegebenen Zeit t;

IV. die Längen der Wege x, bezüglich y, die von den b Punkten während dieser Zeit durchlaufen worden sind.

Lösung. I. Versteht man zunächst unter x und y die zu ganz beliebigen Zeit t zurückgelegten Wege, so hat man, wie leic übersehen ist,

$$1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{kn}{z^2}$$

und

2) $$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{km}{z^2}$$

als Differentialgleichungen der Bewegung.

Aus dem zwischen a, x, y und z bestehenden Zusammenhange folgt hiermit

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = -\frac{k(m+n)}{z^2}$$

oder

$$z' \, d z' = -k(m+n)\frac{dz}{z^2}.$$

Integrirt man und beachtet, dass $z' = -(v + w)$ ist (wenn mit v und w die zur Zeit t vorliegenden Geschwindigkeiten der beiden Punkte bezeichnet werden), so entsteht

$$z' = -\sqrt{\frac{2k(m+n)}{a}}\sqrt{\frac{a-z}{z}}.$$

Wird bei der nun folgenden Integration die Sustitution

3) $$z = a \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

benutzt und die Constante durch Rücksicht auf den Anfangszustand bestimmt, so ergiebt sich leicht

4) $$\theta + \sin\theta = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{2k(m+n)}{a}}\,t,$$

also

5) $$t = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{2k(m+n)}}\,(\theta + \sin\theta).$$

Hiermit ist die Frage I beantwortet, denn der in 5) vorkommende Hilfswinkel ist durch 3) oder durch

6) $$\theta = 2 \arccos\sqrt{\frac{z}{a}}$$

bestimmt.

II. Das Zusammentreffen erfolgt [nach 5)] zu der Zeit

7) $$T = \frac{a\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{2k(m+n)}}.$$

III. Die Entfernung z_t, in welcher sich die Punkte zu einer bestimmten, in Secunden gegebenen Zeit t befinden, ergiebt sich, indem man aus der transcendenten Gleichung 4) zunächst θ berechnet, nach-

dem vorher für t die Secundenzahl eingesetzt worden ist. Mit θ hat man dann auch z, nämlich durch Nr. 3).

IV. Ist z bekannt, so ist es auch

$$8)\qquad x+y=a-z.$$

Eine zweite Gleichung mit x und y folgt aus 1) und 2), nach welchen

$$m\frac{d^2x}{dt^2}-n\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Da hier die linke Seite ein vollständiges Differential ist, so kann man ohne alle Schwierigkeit zweimal integriren und erhält (indem man die Constanten mit Rücksicht auf den Anfangszustand bestimmt)

$$9)\qquad mx=ny.$$

Diese, das Gesetz

$$x:y=n:m$$

ausdrückende Gleichung giebt mit 8) zusammen

$$10)\qquad x=\frac{n}{m+n}(a-z)$$

und

$$11)\qquad y=\frac{m}{m+n}(a-z).$$

Da nun, nach 3),

$$a-z=a\sin^2\tfrac{1}{2}\theta$$

ist, und θ für ein in Secunden gegebenes t aus 4) berechnet werden kann, so hat man hiermit auch x und y zu dieser Zeit.

Aufgabe 22. An den Enden A und B einer Geraden von der Länge a befinden sich zwei Punkte, welche die Massen m und n haben, ursprünglich in Ruhe. Sie ziehen sich proportional den Massen und umgekehrt proportional den dritten Potenzen der Entfernungen an.

I. Welchen Weg x hat der erste Punkt nach Verlauf der Zeit t zurückgelegt und welchen Weg y der zweite?

II. Zu welcher Zeit T treffen die Punkte zusammen und wo erfolgt der Zusammenstoss?

Lösung. I. Als Differentialgleichungen der Bewegung hat man hier

$$1)\qquad v\frac{dv}{dx}=\frac{kn}{(a-x-y)^3},$$

$$2)\qquad w\frac{dw}{dy}=\frac{km}{(a-x-y)^3},$$

bei v und w dieselbe Bedeutung haben, wie in der Lösung der vori-
ı Aufgabe.

Wie dort ergiebt sich

3) $$mx = ny.$$

əraus folgt zunächst

$$v = \frac{n\sqrt{k}}{a} \frac{\sqrt{2anx - (m+n)x^2}}{an - (m+n)x}$$

l nachher

4) $$x = \frac{n}{a(m+n)}\left[a^2 - \sqrt{a^4 - k(m+n)t^2}\right];$$

ˈhin

5) $$y = \frac{m}{a(m+n)}\left[a^2 - \sqrt{a^4 - k(m+n)t^2}\right].$$

II. Der Zusammenstoss ereignet sich zu der Zeit

6) $$T = \frac{a^2}{\sqrt{k}(m+n)},$$

den Abständen $\frac{an}{m+n}$ von A und $\frac{am}{m+n}$ von B.

Aufgabe 23. Wie Aufgabe 22; doch ist die Anziehung irgend eine ınction der Entfernung, also $nf(a-x-y)$, bezüglich $mf(a-x-y)$. ꞉fragt wird

I. Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Geschwindig- ꞉iten v und w, die die zwei Punkte zur Zeit t besitzen?

II. Welche zwischen den von ihnen zurückgelegten Wegen x und y?

III. Wie lässt sich die gegenseitige Entfernung z der Punkte und ie lassen sich x und y als Functionen von t bestimmen?

IV. Was ergiebt sich aus den unter I bis III gefundenen Resul- ten für den Fall, dass die Anziehung α) umgekehrt proportional dem ıadrate, β) dass sie umgekehrt proportional der dritten Potenz der ıtfernung ist?

Lösung. Auf dem in den Lösungen der Aufgaben 21 und 22 ıgeschlagenen Wege findet man:

I. Die Geschwindigkeiten verhalten sich stets umgekehrt wie die ıssen ($v : w = n : m$).

II. Ebenso die zurückgelegten Wege x und y.

III. Wenn $a - x - y$ mit z und $\int f(z)\,dz$ mit $\varphi(z)$ bezeichnet wird, so ist immer

$$z' = \sqrt{2(m+n)[C - \varphi(z)]},$$

also

$$\int \frac{dz}{\sqrt{C - \varphi(z)}} = \sqrt{2(m+n)}\,t + C_1,$$

daher

$$z = \psi(t),$$

das ist

$$x + y = a - \psi(t).$$

Unter Benutzung des in II enthaltenen Satzes folgt hieraus

$$x = \frac{n}{m+n}[a - \psi(t)],$$

$$y = \frac{m}{m+n}[a - \psi(t)].$$

IV. In den genannten speciellen Fällen liefern die unter I bis III entwickelten Resultate Das, was in den Lösungen der beiden vorhergehenden Aufgaben angegeben worden ist.

Aufgabe 24. In einer Flüssigkeit bewegt sich ein materieller Punkt zufolge eines Stosses, den er zur Zeit 0 erhalten und der ihm die Geschwindigkeit c ertheilt hat, in solcher Weise, dass immer der von ihm zurückgelegte Weg

$$s = \frac{kc - W}{k^2}$$

ist, in welchem Ausdrucke W den veränderlichen Widerstand des Mittels bedeutet und k eine von der Natur des letzteren abhängende Constante. Ausser W wirkt auf den Punkt keine Kraft. Man soll berechnen

I. welche Geschwindigkeit v er besitzt nach dem Durchlaufen des Weges s;

II. in welcher Weise der Widerstand W von der Geschwindigkeit v abhängt.

Lösung. Es ergeben sich die Gleichungen

$$v = c - ks$$

und

$$W = kv;$$

welche sehr einfache Sätze aussprechen.

C. Gegeben eine Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft Q und der Geschwindigkeit v.

Aufgabe 25. Ein materieller Punkt wird mit der Anfangsgeschwindigkeit c in eine Flüssigkeit gestossen, welche der Geschwindigkeit proportional widersteht. Es wirkt auf ihn keine andere Kraft, als dieser Widerstand. Die entstehende Bewegung soll untersucht werden.

Lösung. Setzt man den für die Geschwindigkeit 1 vorliegenden Widerstand gleich k, so ist der nach der Zeit t durchlaufene Weg

$$1)\qquad s = \frac{c}{k}(1 - e^{-kt}),$$

nähert sich also bei unendlich wachsendem t der Grenze $\frac{c}{k}$. Die zur Zeit t herrschende Geschwindigkeit ist

$$2)\qquad v = ce^{-kt}.$$

Der Punkt bewegt sich mithin immer langsamer, bleibt aber erst nach unendlich langer Zeit stehen. Nach 1) und 2) hat man auch noch die leicht in Worte zu fassenden Beziehungen

$$3)\qquad s = \frac{c - v}{k}$$

und

$$4)\qquad v = c - ks.$$

Aufgabe 26. Zur Zeit Null hat eine kleine Kugel (Punkt von der Masse 1), welche sich in einem widerstehenden Mittel bewegt, die Anfangsgeschwindigkeit c, jedoch noch keinen Weg zurückgelegt. Der Widerstand, die einzige auf die Kugel wirkende Kraft, ist dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional und besitzt für v gleich 1 den Werth k. Zu bestimmen sind

I. die Geschwindigkeit v der Kugel zur Zeit t;
II. der um diese Zeit zurückgelegte Weg s;
III. die Beziehung zwischen v und s;
IV. diejenige Zeit t_1, zu welcher die Geschwindigkeit u herrscht;
V. die Grössen von v und s nach unendlich langer Zeit.

Lösung. Ohne alle Schwierigkeiten erhält man

$$v = \frac{c}{1 + ckt},$$

$$s = \frac{1}{k} l (1 + ckt),$$

$$s = \frac{1}{k} l \frac{c}{v},$$

$$t_1 = \frac{c - u}{cku},$$

$$v_\infty = 0,$$

$$s_\infty = \infty.$$

Das letzte Resultat verdient sehr, mit dem entsprechenden der vorhergehenden Lösung (Aufg. 25) verglichen zu werden.

Aufgabe 27. Der Widerstand ist der Geschwindigkeit v umgekehrt proportional; sonst Alles wie bei der vorigen Aufgabe. Auch soll die Bewegung in demselben Umfange untersucht werden.

Lösung. Sehr leicht ergiebt sich

$$v = \sqrt{c^2 - 2kt},$$

$$s = \frac{1}{3k}\left(c^3 - \sqrt{c^2 - 2kt}^3\right).$$

Beide Ausdrücke sind nur reell, für $t \leq \frac{c^2}{2k}$.

Ferner

$$s = \frac{1}{3k}(c^3 - v^3)$$

und, bei derselben Bedeutung wie in der Lösung der Aufgabe 26,

$$t_1 = \frac{c^2 - u^2}{2k}.$$

Zu der Zeit

$$T = \frac{c^2}{2k}$$

bleibt die Kugel stehen und hat dann den Gesammtweg

$$S = \frac{c^3}{3k}$$

zurückgelegt.

Aufgabe 28. Die auf einen materiellen Punkt wirkende beschleunigende Kraft ist

$$Q = \sqrt{2k(v - c)},$$

wobei c die Anfangsgeschwindigkeit und k eine gegebene Constante. Der zurückgelegte Weg s, die erlangte Geschwindigkeit v und die be-

schleunigende Kraft werden als Functionen der vom Bewegungsbeginne an verflossenen Zeit t gesucht.

Lösung. $v = c + \frac{1}{2}kt^2$; $s = ct + \frac{1}{6}kt^3$; $Q = kt$, also der Zeit proportional.

Aufgabe 29. Wie Aufg. 26; der Widerstand ist aber der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit proportional; n wird grösser als 2 vorausgesetzt. Gesucht werden v und s als Functionen von t; die Beziehung zwischen v und s; die zum Durchlaufen des Weges s nöthige Zeit.

Lösung. Die zur Zeit t herrschende Geschwindigkeit ist

$$v = [c^{1-n} - (1-n)\,kt]^{\frac{1}{1-n}};$$

der um diese Zeit zurückgelegte Weg

$$s = \frac{1}{(2-n)\,k}\left\{c^{2-n} - [c^{1-n} - (1-n)\,kt]^{\frac{2-n}{1-n}}\right\}.$$

Die zwischen Geschwindigkeit und Weg bestehende Beziehung lautet

$$s = \frac{1}{(2-n)\,k}(c^{2-n} - v^{2-n}).$$

Es liegt mithin nach dem Durchlaufen des Weges s die Geschwindigkeit

$$v = [c^{2-n} - (2-n)\,ks]^{\frac{1}{2-n}}$$

vor und wird für denselben die Zeit

$$t = \frac{1}{(1-n)\,k}\left\{c^{1-n} - [c^{2-n} - (2-n)\,ks]^{\frac{1-n}{2-n}}\right\}$$

gebraucht.

Diese Formeln auf einige specielle Fälle anzuwenden und dann näher zu untersuchen, kann empfohlen werden.

Aufgabe 30. Unter dem Einflusse einer im Sinne der Anfangsgeschwindigkeit wirkenden constanten beschleunigenden Kraft a bewegt sich ein Körper (Punkt von der Masse 1) in einem Mittel, welches der Geschwindigkeit v proportional widersteht. Für $v = 1$ ist die Intensität des Widerstandes $= b$; zur Zeit 0 ist $v = c$ und noch kein Weg zurückgelegt. Man soll berechnen

I. nach welcher Zeit t der Körper die Geschwindigkeit v haben wird;

II. wie sich v als Function von t ausdrücken lässt und ob die Bewegung nach und nach in eine gleichförmige übergeht;

III. wie gross der zurückgelegte Weg s nach Verlauf der Zeit t ist;

IV. welche Beziehung zwischen v und s besteht.

Lösung. Die Geschwindigkeit v besitzt der Körper zu der Zeit

$$t = \frac{1}{b}\, l\, \frac{a - bc}{a - bv}.$$

Hieraus folgt

$$v = \frac{a - (a - bc)\, e^{-bt}}{b},$$

woraus man ersieht, dass die Bewegung sich mehr und mehr einer gleichförmigen mit der Geschwindigkeit $\frac{a}{b}$ nähert.

Ferner ist

$$s = \frac{1}{b^2}\left[a\,b\,t - (a - bc)(1 - e^{-bt})\right]$$

und

$$s = \frac{1}{b^2}\left[b\,(c - v) + a\, l\, \frac{a - bc}{a - bv}\right].$$

Aufgabe 31. Wie Aufg. 30; nur mit dem Unterschiede, dass die Kraft a in dem der Anfangsgeschwindigkeit entgegengesetzten Sinne wirkt. Vor- und Rücklauf des Körpers sind zu untersuchen.

Lösung. Die Vorwärtsbewegung erfolgt so, dass zu der vom Beginne an gezählten Zeit t die Geschwindigkeit immer

$$1)\qquad v = \frac{(a + bc)\, e^{-bt} - a}{b}$$

ist. Der Körper bewegt sich also immer langsamer und bleibt in dem Augenblicke

$$2)\qquad t_1 = \frac{1}{b}\, l\, \frac{a + bc}{a}$$

stehen, um sogleich den Rückweg anzutreten. Während desselben wirkt die Kraft a nicht mehr verzögernd, sondern beschleunigend und ertheilt in der vom Umkehrmomente an gezählten Zeit t die Geschwindigkeit

$$3)\qquad v = \frac{a\,(1 - e^{-bt})}{b},$$

welche sich mehr und mehr der Grenze $\frac{a}{b}$ nähert, so dass also der Körper nach und nach sich gleichförmig bewegt. Wenn abermals die durch Gleichung 2) bestimmte und für den ganzen Vorlauf nöthig gewesene Zeit t_1 verflossen ist, herrscht die Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{a}{a + bc}\, c,$$

welche, wie man sofort sieht, von c übertroffen wird.

Während der Vorwärtsbewegung legt der Körper in der Zeit t immer die Strecke

$$s = \frac{1}{b^2}\left[(a + bc)\left(1 - e^{-bt}\right) - abt\right]$$

zurück; im Ganzen also den Weg

$$s_1 = \frac{1}{b^2}\left(bc - a\,l\,\frac{a + bc}{a}\right).$$

Bei dem Rücklaufe hingegen ist nach der vom Umkehrmomente an gerechneten Zeit t

$$s = \frac{a}{b^2}\left(bt + e^{-bt} - 1\right).$$

Die zwischen v und s bestehenden Beziehungen sind

$$s = \frac{1}{b^2}\left[b(c - v) - a\,l\,\frac{a + bc}{a + bv}\right],$$

bezüglich

$$s = \frac{1}{b^2}\left(a\,l\,\frac{a}{a - bv} - bv\right).$$

Aufgabe 32. Aus einer Höhe, welche nicht so bedeutend ist, dass die Veränderlichkeit der Schwere berücksichtigt werden muss, fällt ein Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit nach der Erde zu. Der Widerstand der Luft ist dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional, und der fallende Körper wird als ein mit der Masse 1 versehener Punkt vorausgesetzt.

I. Welche Geschwindigkeit v ist nach der Zeit t erlangt und welche Strecke s während dieser Zeit durchfallen worden?

II. Wie gross ist die beim Durchlaufen des Weges s erworbene Geschwindigkeit v und welche Höhe h muss durchfallen werden, wenn eine vorgeschriebene Geschwindigkeit u erlangt werden soll?

III. Welche Zeit T braucht der Körper, um aus der Höhe S herabzufallen?

IV. Wie lassen sich aus den unter I und II gefundenen Gleichungen diejenigen herleiten, die (nach der Lösung der Aufgabe 3) dann gelten, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt werden darf?

L ö s u n g. I. Es wirken auf den Körper die Beschleunigung g der Schwere und der Widerstand μv^2. Wird

1) $$\frac{\mu}{g} = k^2$$

gesetzt, so ist

$$2)\qquad v = \frac{1}{k}\frac{e^{gkt} - e^{-gkt}}{e^{gkt} + e^{-gkt}}.$$

Die Bewegung nähert sich also mehr und mehr einer gleichförmigen mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{k}$, das ist $\sqrt{\frac{g}{\mu}}$.

Ferner ergiebt sich

$$3)\qquad s = \frac{1}{gk^2}\, l\, \frac{e^{gkt} + e^{-gkt}}{2}.$$

II. Aus der Höhe s kommend, hat der Körper die Geschwindigkeit

$$4)\qquad v = \frac{1}{k}\sqrt{1 - e^{-2gk^2s}};$$

mithin muss man ihn durch

$$5)\qquad h = \frac{1}{2gk^2}\, l\, \frac{1}{1 - k^2u^2}$$

herabfallen lassen, wenn er mit der Endgeschwindigkeit u auftreffen soll.

III. Die zum Durchfallen der Höhe S nöthige Zeit ist

$$T = \frac{1}{2gk}\, l\, \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2gk^2S}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2gk^2S}}}.$$

IV. Wenn kein Luftwiderstand vorliegt, so ist [nach Gl. 1)] $k = 0$. Damit nimmt das durch Gleichung 2) bekannte v zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Differenzirt man aber Zähler wie Nenner einzeln nach k und setzt dann letzteres $= 0$, so entsteht

$$v = gt,$$

wie in der Lösung der Aufgabe 3. Zu demselben Resultate kann man auch gelangen, wenn man in Gleichung 2) die bekannten Reihen für $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ anwendet, welche für jedes endliche x gelten.

Der durch 3) gegebene Werth von s nimmt für $k = 0$ ebenfalls die Form $\frac{0}{0}$ an. Wird Zähler und Nenner nach k differenzirt, so entsteht

$$\frac{(e^{gkt} - e^{-gkt})\, t}{(e^{gkt} + e^{-gkt})\, 2k},$$

as, wenn man $k=0$ setzt, nochmals $\frac{0}{0}$ giebt. Abermalige Wiederholung des bekannten Verfahrens liefert

$$s=\tfrac{1}{2}gt^2.$$

Dasselbe ergiebt sich bei Anwendung der Reihe für $l\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Auf Gleichung 4), welche sich auch

$$h=-\frac{1}{2gk^2}l(1-k^2u^2)$$

schreiben lässt, angewendet, liefert das mehrbenutzte Differenzirverfahren

$$h=\frac{u^2}{2g},$$

also

$$u=\sqrt{2gh},$$

wie in der Lösung der Aufgabe 3.

Dasselbe ergiebt sich bei Anwendung der Reihe

$$l(1-x)=-\tfrac{1}{1}x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3-\ldots\ldots,$$

deren Giltigkeitsbedingung

$$-1\leqq x<+1$$

erfüllt ist, weil [nach Gl. 3)] ku immer kleiner als 1 sein muss.

Aufgabe 33. Von der Erdoberfläche aus wird ein Körper (Punkt von der Masse 1) mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen. Der Luftwiderstand ist (wie bei Aufg. 32) dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional und für die Einheit derselben gleich μ. Die Schwere wird als unveränderlich angesehen.

I. Wie gross sind beim Aufsteigen v und s nach der Zeit t und welche Beziehung besteht zwischen beiden?

II. Welche Zeit T braucht der Körper, um bis zum höchsten Punkte seiner Bahn zu gelangen?

III. Welche Höhe S ersteigt er im Ganzen?

IV. Wie lassen sich aus den unter I gefundenen Werthen von v und s diejenigen herleiten, welche im nicht widerstehenden Mittel gelten?

V. In welchem Verhältnisse steht die Geschwindigkeit v_1, mit der der Körper, von der höchsten Stelle herabfallend, wieder unten anlangt, zu der Anfangsgeschwindigkeit c?

VI. Wie verhält sich die zum Herabfallen aus der grössten Höhe nöthige Zeit T_1 zu derjenigen T, welche zum Aufsteigen gebraucht wird?

VII. Auf welche Weise lässt sich der Widerstandscoefficient μ bestimmen, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit c kennt und die Zeit, welche verstreicht, bis der Körper wieder auf der Erde ankommt?

Lösung. I. Unter Beibehaltung der in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe benutzten Abkürzung

$$k = \sqrt{\frac{\mu}{g}}$$

ergiebt sich

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{ck - \tan gkt}{1 + ck \tan gkt}$$

oder auch

$$v = \frac{1}{k} \frac{ck \cos gkt - \sin gkt}{\cos gkt + ck \sin gkt}.$$

Ferner

$$s = \frac{1}{gk^2} l\,(\cos gkt + ck \sin gkt)$$

und

$$s = \frac{1}{2gk^2} l \frac{1 + k^2 c^2}{1 + k^2 v^2}.$$

II. Die bis zum Aufsteigen an die höchste Stelle nöthige Zeit ist

$$T = \frac{1}{gk} \operatorname{arctan} kc;$$

III. die Steighöhe

$$S = \frac{1}{2gk^2} l\,(1 + k^2 c^2).$$

IV. Im nicht widerstehenden Mittel ist $k = 0$. Damit nehmen die für v und s gefundenen Gleichungen zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Wendet man, unter gleichzeitiger Benutzung passender Umgestaltungen, die bekannte für die Bestimmung der Werthe derartiger Ausdrücke geltende Regel der Differentialrechnung an (vergl. IV der vorigen Lösung), so ergeben sich ohne nennenswerthe Schwierigkeiten die unter Aufgabe 4 stehenden Gleichungen.

V. Durch Benutzung von II der vorhergehenden Lösung ergiebt sich, dass der Körper mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{1+k^2c^2}}$$

auf die Erdoberfläche zurückfällt. Dieselbe ist also kleiner wie die Anfangsgeschwindigkeit c, mit welcher er aufstieg und verhält sich zu letzterer wie 1 zu $\sqrt{1+k^2c^2}$.

VI. Ebenso erhält man durch Anwendung der unter III in der Lösung der Aufgabe 32 entwickelten Gleichung den Ausdruck

$$T_1 = \frac{1}{gk} l\,(kc + \sqrt{1+k^2c^2})$$

als die zum Herabfallen von der höchsten Stelle nöthige Zeit. Daher gilt

$$T : T_1 = arctan\,kc : l\,(kc + \sqrt{1+k^2c^2}).$$

Setzt man $kc = \xi$, so kann $arctan\,\xi$ als die von 0 bis ξ gerechnete Fläche der Curve

$$\eta = \frac{1}{1+\xi^2}$$

angesehen werden; ebenso $l\,(\xi + \sqrt{1+\xi^2})$ als die der Linie

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Da nun

$$\sqrt{1+\xi^2} < 1 + \xi^2,$$

so ist $\eta < \eta_1$, mithin auch $T < T_1$. Für das Hinaufsteigen ist daher weniger Zeit erforderlich, als für das Herabfallen von der höchsten Stelle.

VII. Aus der Gleichung

$$T + T_1 = \frac{1}{gk}\left[arctan\,kc + l\,(kc + \sqrt{1+k^2c^2})\right]$$

lässt sich, weil alles Uebrige bekannt ist, k bestimmen; man hat also auch μ, weil $\mu = k^2 g$.

Aufgabe 34. Unter den in den Aufgaben 32 und 33 vorausgesetzten Umständen fällt ein Körper aus der Höhe s_1 auf eine Unterlage, die ihn, wegen vollkommener Elasticität, mit der Auftreffgeschwindigkeit wieder nach oben wirft. Er ersteigt in Folge dessen die Höhe s_2, fällt aus dieser wieder herab, wird abermals hinauf geworfen, ersteigt die Höhe s_3 u. s. f. u. s. f. Man soll mit Benutzung der Lösungen der genannten beiden Aufgaben die Höhen s_2, s_3, ... s_n durch s_1 aus-

drücken und auch angeben, wie gross dieselben sind, wenn s_1 unendlich ist.

Lösung. Setzt man $2gk^2 = \varkappa$, so ergiebt sich

$$s_2 = \frac{1}{\varkappa} l \frac{2e^{\varkappa s_1} - 1}{e^{\varkappa s_1}},$$

$$s_3 = \frac{1}{\varkappa} l \frac{3e^{\varkappa s_1} - 2}{2e^{\varkappa s_1} - 1}$$

u. s. f., also

$$s_n = \frac{1}{\varkappa} l \frac{n e^{\varkappa s_1} - (n-1)}{(n-1) e^{\varkappa s_1} - (n-2)}.$$

Wenn die erste Höhe (s_1) unendlich ist, so sind doch alle folgenden endlich, nämlich

$$s_2 = \frac{1}{\varkappa} l 2,$$

$$s_3 = \frac{1}{\varkappa} l \tfrac{3}{2}$$

u. s. f.; allgemein

$$s_n = \frac{1}{\varkappa} l \frac{n}{n-1}.$$

Aufgabe 35. Ein Eisenbahnzug, welcher das Gewicht P besitzt, bewegt sich von einem Punkte A aus auf einer schiefen Ebene, die unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist. Er hat die Anfangsgeschwindigkeit c, und es wirkt die constante Zugkraft Q in der Richtung der Bewegung. Der gesammte Luftwiderstand ist Kv^2; der Reibungscoefficient $f = tan\ \beta$, wobei β der Reibungswinkel. Für die Thalfahrt und für die Bergfahrt sollen bestimmt werden

a) die Geschwindigkeit v des Zuges zur Zeit t;

b) der von ihm zu dieser Zeit durchlaufene, von A aus gerechnete Weg s;

c) die beim Zurücklegen der Strecke s erlangte Geschwindigkeit v;

d) die aus den erhaltenen Gleichungen sich ergebenden wichtigsten Folgerungen, besonders auch diejenige Zugkraft, welche zur Herstellung einer gleichförmigen Bewegung nöthig sein würde.

Lösung. *A. Die Thalfahrt.*

Als Differentialgleichung der Bewegung ergiebt sich

$$1)\qquad \frac{dv}{dt}=\frac{gK}{P}\left\{\frac{Q+P(\sin\alpha-f\cos\alpha)}{K}-v^2\right\}.$$

Es müssen daher die folgenden drei Fälle unterschieden werden.

I[ter] Fall: $\quad Q+P(\sin\alpha-f\cos\alpha)>0$

oder, weil $f=\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ ist,

$$Q+P\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}>0,$$

was für $\alpha>\beta$ stets stattfindet und für $\alpha<\beta$ dann, wenn

$$Q>P\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta}$$

ist.

Zur Abkürzung sei hier und in allen folgenden Fällen

$$\frac{gK}{P}=k;$$

ferner, doch nur in diesem ersten Falle,

$$\frac{Q+P(\sin\alpha-f\cos\alpha)}{K}=b^2.$$

Dann liefert die Gleichung 1)

$$v=b\frac{(b+c)e^{bkt}-(b-c)e^{-bkt}}{(b+c)e^{bkt}+(b-c)e^{-bkt}},$$

$$s=\frac{1}{k}l\frac{(b+c)e^{bkt}+(b-c)e^{-bkt}}{2b}$$

und

$$v=\sqrt{b^2-(b^2-c^2)e^{-2ks}}.$$

Man erkennt hieraus Folgendes:

Die Zuggeschwindigkeit v nähert sich der Grenze b. Ist $c<b$, so wächst v von c bis b. Für $c=b$ liegt gleichförmige Bewegung vor. Hierzu gehört die Zugkraft

$$Q=Kc^2+P\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta}.$$

Dieselbe ist für $\alpha\leqq\beta$ jedenfalls positiv, kann aber negativ werden, wenn $\alpha>\beta$ ist. (Bremsen des Zuges.)

Für $c>b$ nimmt die Geschwindigkeit von c bis b ab.

II^ter^ Fall: $Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 0$

oder

$$Q = P\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\beta},$$

mithin $\beta > \alpha$.

Hier giebt die Gleichung 1)

$$v = \frac{c}{1 + ckt},$$

$$s = \frac{1}{k}l(1 + ckt)$$

und

$$v = c\,e^{-ks}.$$

In diesem zweiten Falle wird also die Geschwindigkeit des Zu immer geringere und nähert sich mehr und mehr der Null.

III^ter^ Fall: $Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha) < 0$

oder

$$Q + P\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} < 0,$$

daher auch $\beta > \alpha$.

Setzt man hier zur Abkürzung

$$\frac{Q + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{K} = -b^2,$$

so folgt

$$v = b\frac{c - b\tan bkt}{b + c\tan bkt},$$

was sich mit Benutzung von

$$\frac{c}{b} = \tan\gamma$$

eleganter in der Form

$$v = b\tan(\gamma - bkt)$$

geben lässt.

Ferner

$$s = \frac{1}{k}l(\cos bkt + \tan\gamma\sin bkt)$$

und

$$v = \sqrt{(b^2 + c^2)\,e^{-2ks} - b^2}.$$

Diess lehrt, dass die Bewegung eine verzögerte ist und dass stehen bleibt zu der Zeit

$$t = \frac{1}{bk} \arctan \frac{c}{b},$$

mithin nachdem er den Weg

$$s = \frac{1}{2k} l \left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)$$

zurückgelegt hat.

B. Die Bergfahrt.

Für diese lautet die Differentialgleichung der Bewegung

$$2) \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{gK}{P} \left\{ \frac{Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{K} - v^2 \right\},$$

und es sind abermals drei Fälle zu unterscheiden.

I[ter] Fall: $Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) > 0$

oder

$$Q - P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} > 0.$$

Wird hier zur Abkürzung

$$\frac{Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{K} = b^2$$

gesetzt, so folgen für v und s wieder die beim ersten Falle der Thalfahrt gefundenen Gleichungen, in denen nur b jetzt eine andere Bedeutung hat. Für $c = b$ ist die Bewegung gleichförmig; es gehört hierzu die Zugkraft

$$Q = Kc^2 + P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

II[ter] Fall: $Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) = 0$

oder

$$Q = P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

Es ergeben sich die bei A II. gefundenen Gleichungen nebst ihren Folgerungen.

III[ter] Fall: $Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) < 0$

oder

$$Q - P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} < 0.$$

Bei Benutzung der Abkürzung

$$\frac{Q - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{K} = -b^2$$

gelangt man zu den unter A III. entwickelten Formeln, mithin auch zu denselben Schlüssen.

D. Gegeben eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t.

Aufgabe 36. Ein materieller Punkt bewegt sich geradlinig in solcher Weise, dass seine Geschwindigkeit v immer proportional der n^{ten} Potenz der verflossenen Zeit ist, wobei $n \gtrless -1$ vorausgesetzt wird. Zur Zeit 0 hat er bereits den Weg a hinter sich; für die Einheit der Zeit ist die Geschwindigkeit gleich k.

Nach welchem Gesetze ist die auf den Punkt wirkende beschleunigende Kraft Q veränderlich, und wie gross ist der in der Zeit t durchlaufene Weg s?

Lösung. Das für die Veränderlichkeit der Kraft geltende Gesetz lautet

$$Q = knt^{n-1}.$$

Der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist

$$s = a + \frac{k}{n+1} t^{n+1}.$$

Für $k = g$ und $n = 1$ ist die Bewegung der bekannte Fall im luftleeren Raume. (Vergl. Aufg. 3.)

Aufgabe 37. Von einem festen Centrum C wird ein beweglicher materieller Punkt P angezogen. Er bewegt sich in einem widerstehenden Mittel, hat zur Zeit 0 den Abstand a von C und zur Zeit t die Geschwindigkeit

$$v = a\,\alpha^2 e^{-\alpha t}\, t,$$

in welchem Ausdrucke a und α bekannte Constanten sind. Man soll bestimmen

I. den zur Zeit t vorliegenden Abstand y vom Centrum C;
II. die beschleunigende Kraft Q (incl. Widerstand) als Function von t;
III. ob die Bewegung identisch ist mit einer solchen, bei welcher die Anziehung proportional dem Centrumabstande erfolgt und das Mittel der Geschwindigkeit v proportional widersteht.

Lösung. Ohne Schwierigkeit ergiebt sich

$$y = a\, e^{-\alpha t}(1 + \alpha t)$$

und

$$Q = a\, \alpha^2\, e^{-\alpha t}(1 - \alpha t).$$

Da die letztere Gleichung sich auf die Form

$$Q = \alpha^2 y - 2\alpha v$$

bringen lässt, so erkennt man, dass die Bewegung in der That eine von den in der Aufgabe unter III. genannten ist und zwar diejenige, bei welcher α^2 die Beschleunigung der Anziehung für die Einheit des Centrumabstandes und 2α der Widerstand des Mittels für die Einheit der Geschwindigkeit.

Aufgabe 38. In einem widerstehenden Mittel hat ein materieller Punkt eine Bewegung, bei der er zur Erlangung der Geschwindigkeit v immer die Zeit

$$t = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right)$$

braucht, in welchem Ausdrucke c die Geschwindigkeit für $t = 0$ und k derjenige Widerstand, den das Mittel entgegensetzt, wenn $v = 1$ ist. Welcher Art ist die die Bewegung erzeugende beschleunigende Kraft Q, d. h. wie lässt sie sich als Function der Geschwindigkeit v darstellen?

Lösung. Es wirkt auf den Punkt nur ein dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportionaler Widerstand ($Q = - k v^2$).

Aufgabe 39. Eine auf einen materiellen Punkt wirkende beschleunigende Kraft Q ruft eine Bewegung desselben hervor, bei welcher immer die Zeit

$$t = \frac{1}{2ab}\, l\, \frac{1 + av}{1 - av}$$

zur Erwerbung der Geschwindigkeit v nothwendig ist.

In welcher Weise hängt Q erstens von t und zweitens von v ab?

Lösung.

$$Q = b\left\{1 - \left(\frac{e^{abt} - e^{-abt}}{e^{abt} + e^{-abt}}\right)^2\right\} = \frac{4b}{(e^{abt} + e^{-abt})^2}$$

und

$$Q = b - a^2 b v^2.$$

Aus der letzten Gleichung ersieht man, dass die Bewegung durch eine constante beschleunigende Kraft b erzeugt werden kann in einem Mittel, welches dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional widersteht und für die Einheit derselben den Widerstand $a^2 b$ leistet.

E. Gegeben eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v und dem zurückgelegten Wege s.

Aufgabe 40. Ein materieller Punkt bewegt sich derartig, dass seine Geschwindigkeit immer

$$v = c + ks$$

ist, in welchem Ausdrucke k eine gegebene Constante bedeutet. Zur Zeit Null ist noch kein Weg durchlaufen.

Nach welchem Gesetze ist die die Bewegung hervorbringende beschleunigende Kraft Q veränderlich? Wie viel Zeit wird zum Zurücklegen des Weges s gebraucht? In welcher Weise hängen v und s von t ab?

Lösung. Es ergeben sich die Gleichungen

$$Q = k(c + ks) = kv = cke^{kt},$$

$$t = \frac{1}{k} l \frac{c + ks}{c},$$

$$v = ce^{kt},$$

$$s = \frac{c(e^{kt} - 1)}{k},$$

welche sehr einfache Gesetze aussprechen.

Aufgabe 41. Das feste Centrum A zieht einen beweglichen Punkt P so an, dass in jedem Abstande y die Geschwindigkeit v immer ausgedrückt ist durch die Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2c}{b} l \frac{a(b+y)}{(a+b)y}},$$

in welcher a, b und c bekannte Constanten sind. Man soll bestimmen

I. in welcher Art die beschleunigende Kraft Q von y abhängt;

II. wie sie sich zu derjenigen verhält, welche erzeugt werden würde, wenn eine materielle, von A aus im Sinne der Bewegung sich erstreckende Gerade AB (Querschnitt q, Länge b, Dichtigkeit ε) nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf den Punkt P wirkte.

Lösung. Die beschleunigende Kraft hängt durch die Gleichung

$$Q = \frac{c}{y(b+y)}$$

mit dem Abstande y zusammen. Die Bewegung erfolgt mithin gerade so, als ob eine solche in II. genannte Gerade anzöge und zwar eine,

bei welcher das Produkt $kbq\varepsilon$ (also km) den Werth c hat. (Aufg. 126 des I. Theiles.)

Aufgabe 42. Im Abstande y von einem festen anziehenden Mittelpunkte C hat ein Körper, der die Masse 1 besitzt und als Punkt (P) aufgefasst werden darf, die Geschwindigkeit

$$v = \pm \sqrt{2A\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{1}{b}\right)},$$

wobei A, a, b gegebene constante Grössen sind. Zu berechnen ist

I. wie sich die hierbei wirkende beschleunigende Kraft Q durch y ausdrücken lässt;

II. in welchem Zusammenhange die vorliegende Bewegung mit derjenigen steht, welche eintritt, wenn auf den beweglichen Punkt eine materielle Kreislinie, deren Ebene senkrecht zu PC liegt, nach dem Newton'schen Gesetze anziehend wirkt und zwar so, dass C ihr Mittelpunkt, a ihr Radius, q ihr Querschnitt, ε ihre Dichtigkeit und b der Abstand ihrer Peripherie von derjenigen Stelle, an welcher P anfänglich in Ruhe ist.

Lösung. Da, wie sich sehr leicht ergiebt,

$$Q = A\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}^3}$$

ist, so erfolgt die Bewegung ganz so, wie sie vor sich gehen würde, wenn nur die Anziehung der in der Aufgabe bezeichneten Kreislinie thätig wäre und das Produkt $2\pi akq\varepsilon$ (vergl. Theil I, Nr. 128) den Werth A hätte.

Aufgabe 43 Nach welchem Gesetze muss eine an unveränderlicher Stelle C ihren Sitz habende Anziehung Q wirken, wenn ein derselben unterliegender materieller Punkt P, der sich anfänglich im Abstande c in Ruhe befand, in jeder Entfernung y die Geschwindigkeit

$$v = K\sqrt{\sqrt{a^2+y^2} - y - b + c}$$

(K, a, b constant) besitzen soll?

Kann die Bewegung erzeugt werden durch eine nach dem Newton'schen Gesetze anziehende Kreisfläche, deren Ebene senkrecht zu PC liegt, deren Mittelpunkt C, deren Radius a, deren Dicke δ, deren Dichtigkeit ε ist und deren Peripherie anfänglich um b von P absteht?

Lösung. Man findet

$$Q = \tfrac{1}{2}K^2\left(1 - \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\right).$$

Die Bewegung kann mithin durch die genannte Kreisfläche erzeugt werden, wenn (vergl. Theil I, Aufg. 130) für letztere $2\pi k\delta\varepsilon = \frac{1}{2}K^2$ ist.

Aufgabe 44. Ein materieller Punkt bewegt sich so, dass der von ihm zurückgelegte Weg s immer durch die Gleichung

$$s = \frac{1}{2a}\, l\, \frac{b + ac^2}{b + av^2}$$

von der Geschwindigkeit v, ihrem Anfangswerthe c und zwei Constanten a und b abhängt.

Man soll berechnen, welcher Art die beschleunigende (verzögernde) Kraft Q ist, die diese Bewegung hervorruft.

Lösung. Es wirkt ein dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportionaler Widerstand av^2 und, ebenfalls verzögernd, eine constante Kraft b; denn man findet leicht, dass

$$Q = -b - av^2$$

ist.

Aufgabe 45. Bei der Bewegung eines gewissen Punktes ist der durchlaufene Weg s immer der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit v proportional. Zur Erlangung der Einheit von v wird die Strecke k zurückgelegt. Anfänglich (um die Zeit 0) herrscht die Geschwindigkeit c. Wie gross ist dieselbe nach Verfluss der Zeit t? Welcher Art ist die beschleunigende Kraft Q? Wie hängt die Bewegung mit der in Aufgabe 3 untersuchten zusammen?

Lösung. Für $n \gtrless 1$ ist

$$v = \left(c^{n-1} + \frac{n-1}{kn}\, t\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

und

$$Q = \frac{1}{kn}\left(c^{n-1} + \frac{n-1}{kn}\, t\right)^{\frac{2-n}{n-1}} = \frac{1}{kn}\, v^{2-n};$$

für $n = 1$ hingegen

$$v = c\, e^{\frac{t}{k}}$$

und

$$Q = \frac{c}{k}\, e^{\frac{t}{k}} = \frac{v}{k};$$

also sind v und Q nach geometrischer Progression wachsend.

Für $n=2$ und $k=\frac{1}{2g}$ geht die Bewegung in den unter Nr. 3 behandelten Wurf über.

Aufgabe 46. In welcher Weise hängt die die Bewegung eines Körpers (Punkt von der Masse 1) hervorrufende beschleunigende Kraft Q von der Geschwindigkeit v und vom Wege s ab, wenn letzterer immer durch die Gleichung

$$s=a\left(1-e^{-\frac{v^2}{2c}}\right)$$

ausgedrückt ist, in welcher a und c Constanten sind?

Kann diese Bewegung erzeugt werden durch eine nach einer Seite hin ins Unendliche verlaufende materielle Gerade, die den constanten Querschnitt q, die unveränderliche Dichtigkeit ε besitzt, nach dem Newton'schen Gesetze anzieht und in deren Richtung, ausserhalb ihrer Masse, der bewegliche Punkt liegt, ursprünglich im Abstande a vom Anfange der Linie sich in Ruhe befindend?

Lösung. Die beschleunigende Kraft ist

$$Q=\frac{c}{a}\,e^{\frac{v^2}{2c}}=\frac{c}{a-s}.$$

Aus der letzten Form erkennt man, dass die genannte Gerade die vorliegende Bewegung veranlasst, wenn (siehe Theil I, Nr. 126) das Produkt $kq\varepsilon$ den Werth c hat.

F. Gegeben eine Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege s und der verflossenen Zeit t.

Aufgabe 47. Der in der Zeit t zurückgelegte Weg s ist bei einer gewissen Bewegung gleich $a+bt+\frac{1}{2}ct^2$, wobei a, b und c constant sind. Wie gross ist die Geschwindigkeit v und welcher Art die beschleunigende Kraft Q?

Lösung. $v=b+ct$; $Q=c$.

Aufgabe 48. Es soll berechnet werden, welche Geschwindigkeit v ein Körper zur Zeit t besitzt, wie sich die beschleunigende Kraft Q als Function der Zeit und wie sie sich als solche der Geschwindigkeit und der Zeit herausstellt, wenn der durchlaufene Weg s immer den Werth

$$s=\frac{2a}{b^4}\left(\frac{1}{6}b^3t^3-\frac{1}{2}b^2t^2+bt+e^{-bt}-1\right)$$

hat.

Lösung.

$$v = \frac{2a}{b^3}\left(\tfrac{1}{2}b^2t^2 - bt + 1 - e^{-bt}\right);$$

$$Q = \frac{2a}{b^2}\left(bt - 1 + e^{-bt}\right);$$

$$Q = at^2 - bv.$$

Die Bewegung wird also erzeugt, wenn eine dem Quadrate der Zeit proportionale beschleunigende Kraft wirkt, die für die Einheit von t gleich a ist; ausserdem aber ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand, welcher für $v = 1$ die Stärke b hat.

Aufgabe 49. In einem widerstehenden Mittel bewegt sich nach einem festen anziehenden Centrum C ein materieller Punkt derartig, dass der Abstand zur Zeit t immer durch

$$y = \frac{c}{2a} e^{-bt}\left[(a+b)e^{at} + (a-b)e^{-at}\right]$$

ausgedrückt wird, wobei a, b und c Constanten sind.

Wie gross ist die beschleunigende Kraft Q um diese Zeit? Entsteht die Bewegung vielleicht dann, wenn die Anziehung dem Centrumabstande y proportional erfolgt und der Mittelwiderstand sich in demselben Verhältnisse vermehrt, in welchem die Geschwindigkeit v zunimmt?

Lösung. Zunächst ergiebt sich

$$v = \frac{c}{2a}(b^2 - a^2)e^{-bt}\left(e^{at} - e^{-at}\right)$$

und

$$Q = \frac{c}{2a}(b^2 - a^2)e^{-bt}\left[(a-b)e^{at} + (a+b)e^{-at}\right].$$

Da sich Letzteres auf die Form

$$Q = (b^2 - a^2)y - 2bv$$

bringen lässt, so muss die in der Aufgabe gestellte zweite Frage mit der Bemerkung bejaht werden, dass $b^2 - a^2$ die für $y = 1$ vorliegende Beschleunigung der Anziehung und $2b$ die Stärke des Widerstandes für die Einheit der Geschwindigkeit ist.

Aufgabe 50. Ein materieller Punkt, der sich in einem nicht widerstehenden Mittel bewegt, befindet sich zur Zeit Null in der Entfernung b von einem festen Centrum C und wird durch dieses so abge-

stossen, dass er zur Erlangung des Abstandes x von demselben immer die Zeit

$$t = \frac{b}{k} \sqrt{x^2 - b^2}$$

braucht, in welchem Ausdrucke k eine bekannte Constante ist. Bestimmt soll werden, welche Geschwindigkeit v der Punkt zur Zeit t besitzt, welche im Abstande x, welcher Art die Abstossung ist und was die Constante k bedeutet.

Lösung.

$$v = \frac{k^2}{b} \cdot \frac{t}{\sqrt{b^4 + k^2 t^2}};$$

und

$$v = \frac{k}{b} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{x}.$$

Ferner

$$Q = \frac{k^2}{x^3}.$$

Die Abstossung erfolgt also umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung. Für die Einheit der Letzteren ist k^2 ihre Intensität.

G. Gegeben eine Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft Q, der Geschwindigkeit v und der Zeit t, oder zwischen Q, v und dem zurückgelegten Wege s.

Aufgabe 51. Die auf einen Körper (Punkt von der Masse 1) wirkende beschleunigende Kraft ist dem Quadrate der Zeit t proportional und hat für $t = 1$ die Intensität a. Der Mittelwiderstand wächst in demselben Verhältnisse, in welchem die Geschwindigkeit v zunimmt und ist für die Einheit derselben gleich b. Anfangsgeschwindigkeit liegt nicht vor. Wie gross sind v und s zur Zeit t? Auf welche Weise hängt s von v und t ab?

Lösung. Mit Beachtung des Umstandes, dass eine Differentialgleichung von der allgemeinen Form

$$\frac{dv}{dt} + Tv + T_0 = 0,$$

in welcher T und T_0 Functionen von t allein sind, die Integralgleichung

$$v = e^{-\int T dt}\left(Const. - \int T_0 \, e^{\int T dt} \, dt\right)$$

liefert, erhält man leicht

$$v = \frac{2a}{b^3}\left(\tfrac{1}{2}b^2t^2 - bt + 1 - e^{-bt}\right),$$

$$s = \frac{2a}{b^4}\left(\tfrac{1}{6}b^3t^3 - \tfrac{1}{2}b^2t^2 + bt + e^{-bt} - 1\right),$$

$$s = \frac{1}{3b}(at^3 - 3v),$$

welche Ausdrücke mit t fortwährend wachsen.

Aufgabe 52. Durch das Centrum einer Vollkugel ist eine dünne geradlinige Bohrung geführt. In derselben bewegt sich vo Oberfläche aus, ohne Anfangsgeschwindigkeit, ein materieller P welcher nur der Kugelanziehung und einem Mittelwiderstande u liegt, der der Geschwindigkeit v proportional ist und für die E der letzteren die Intensität n hat.

Man soll, sowohl für bedeutende, als auch für geringe V stände, berechnen, in welcher Entfernung y vom Centrum der] sich zur Zeit t befindet und wie gross zu dieser Zeit seine Geschw keit v ist. Ferner soll man ausführlich ermitteln, welcher A grosse und welcher Art für kleine Widerstände die eintretend wegung sein muss.

Lösung. Die Differentialgleichung

$$Q = K(a - s) - nv,$$

in welcher a der Kugelradius, $a - s = y$ der Centrumabstand u für die Einheit des letzteren die Intensität der Anziehung (Theil I gabe 138), bildet hier den Ausgangspunkt der Rechnung. Bring sie auf die Form

$$1)\qquad y'' + ny' + Ky = 0,$$

so findet man leicht, dass

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} \text{ und } y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

zwei particuläre Integrale sind, wobei

$$\lambda_1 = -\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K}$$

und

$$\lambda_2 = -\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K}.$$

Das allgemeine Integral ist daher

$$2)\qquad y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

etzt man zur Abkürzung

$$K = k^2,$$
$$\tfrac{1}{2} n = \alpha,$$
$$\sqrt{\alpha^2 - k^2} = \beta,$$

so wird

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta,$$
$$\lambda_2 = -\alpha - \beta.$$

Nun muss unterschieden werden, ob I. λ_1 und λ_2 reell und verschieden, oder ob sie II. reell und gleich, oder ob sie III. imaginär sind.

I^ter Fall. Wenn der Mittelwiderstand so beschaffen ist, dass $\left(\frac{n}{2}\right)^2 > K$, also

$$n > 2k,$$

so sind λ_1 und λ_2 reell, aber verschieden.

Dann findet man zunächst

$$y = e^{-\alpha t} (C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}),$$

hieraus aber

$$v = e^{-\alpha t} [(\alpha - \beta) C_1 e^{\beta t} + (\alpha + \beta) C_2 e^{-\beta t}];$$

also, wenn die Constanten C_1 und C_2 bestimmt werden,

$$y = \frac{a}{2\beta} e^{-\alpha t} \{(\alpha + \beta) e^{\beta t} - (\alpha - \beta) e^{-\beta t}\}$$

oder, anders geschrieben,

$$y = \frac{a}{2\beta} \left\{ \frac{\alpha + \beta}{e^{(\alpha - \beta) t}} - \frac{\alpha - \beta}{e^{(\alpha + \beta) t}} \right\}$$

und

$$v = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta} a e^{-\alpha t} \{e^{\beta t} - e^{-\beta t}\}$$

oder auch

$$v = a \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta} \left\{ \frac{1}{e^{(\alpha - \beta) t}} - \frac{1}{e^{(\alpha + \beta) t}} \right\}.$$

II^ter Fall. Für

$$n = 2k$$

liegen reelle, aber gleiche λ_1 und λ_2 vor. Die Gleichung 2) giebt dann nicht unmittelbar das allgemeine Integral von 1), sondern nur ein particuläres. Setzt man jedoch

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \delta, \text{ also } \lambda_2 = \lambda_1 + \delta,$$

führt diess in 2) ein und lässt schliesslich δ zu Null werden, so ergiebt sich zunächst

$$y = e^{-\alpha t}(B_1 + B_2 t);$$

hieraus

$$v = e^{-\alpha t}[(\alpha B_1 - B_2) + \alpha B_2 t];$$

nach Ermittelung der Constanten B_1 und B_2 aber

$$y = a e^{-\alpha t}(1 + \alpha t)$$

und

$$v = a\alpha^2 e^{-\alpha t} t.$$

III[ter] Fall. Ist endlich der Widerstand des Mittels so gering, dass

$$n < 2k,$$

so hat man

$$\lambda_1 = -\alpha + i\beta,$$
$$\lambda_2 = -\alpha - i\beta.$$

Dann liefert die Gleichung 2)

$$y = \{A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t\} e^{-\alpha t},$$

woraus

$$v = \{(\alpha A_1 - \beta A_2)\cos\beta t + (\alpha A_2 + \beta A_1)\sin\beta t\} e^{-\alpha t}$$

folgt. Nach Bestimmung von A_1 und A_2 ergiebt sich schliesslich

$$y = \frac{a}{\beta}(\alpha \sin\beta t + \beta\cos\beta t) e^{-\alpha t},$$

$$v = a\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin\beta t.$$

Die Natur der Bewegung anlangend lehren die gefundenen Gleichungen Folgendes:

I[ter] Fall. Der Centrumabstand y wird zwar immer kleiner, doch erst nach unendlich langer Zeit zu Null, nie aber negativ. Schwingungen um den Kugelmittelpunkt finden also nicht statt, während diess bekanntlich der Fall ist, wenn kein Mittelwiderstand vorliegt. (Aufgabe 15.)

Die Geschwindigkeit v wächst anfänglich und zwar bis sie den Maximalwerth

$$v_{max} = a\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta}\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}}\left\{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}} - \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right\}$$

erreicht hat, was zu der Zeit

$$t = \frac{1}{2\beta}\, l\,\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

geschieht; nachher nimmt sie immer ab, doch tritt vollständige Ruhe erst für $t = \infty$ ein.

II^ter Fall. Auch hier wird der Centrumabstand immer geringer, doch erst nach unendlich langer Zeit zu Null. Die Geschwindigkeit wächst, bis sie den Werth

$$v_{max} = \frac{a\alpha}{e}$$

erlangt hat, was für $t = \frac{1}{\alpha}$ eintritt; hierauf wird sie immer kleiner, verschwindet in endlicher Zeit aber nie vollkommen.

Es ist daher auch in diesem zweiten Falle die Bewegung keine schwingende, geht vielmehr nur bis zum Kugelmittelpunkte.

III^ter Fall. Hier liegen Schwingungen vor und zwar solche, deren Weiten nach einer geometrischen Progression abnehmen. Die für y gefundene Gleichung giebt nämlich

$$y = a, \quad -ae^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}, \quad +ae^{-\frac{2\alpha\pi}{\beta}}, \quad -ae^{-\frac{3\alpha\pi}{\beta}}, \ldots.$$

für bezüglich

$$t = 0, \quad \frac{\pi}{\beta}, \quad \frac{2\pi}{\beta}, \quad \frac{3\pi}{\beta}, \ldots.$$

Da, wie man hieraus sieht, diese immer kleiner werdenden Schwingungen in gleichen Zeiten (isochron) vor sich gehen, so wird die Geschwindigkeit stets geringer. Diess lehrt übrigens auch die für v entwickelte Gleichung.

Capitel II.

Aufgaben über die krummlinige Bewegung eine freien Punktes.

Erklärung. Wenn auf einen Punkt von der Masse m, bezogen auf ein rechtwinkliges System die Coordinaten x, y un beliebig viele Kräfte wirken, die sich zu einer Resultante R drei Componenten X, Y und Z, im Sinne der x, y und z, zus setzen lassen, so gilt bekanntlich Folgendes:

Die sogenannten Achsengeschwindigkeiten, d. h. die Gesch keiten des Punktes in den Richtungen der drei Coordinatenachs

I) $$v_x = \frac{dx}{dt},$$

II) $$v_y = \frac{dy}{dt},$$

III) $$v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Hierbei ist dt, das Differential der Zeit, immer positiv; v_x, v_y sind es so lange, als die Coordinaten x, y und z wachsen.

Aus I) bis III) folgt auch die Bahngeschwindigkeit v, weil

IV) $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

sein muss.

Für die im Sinne der drei Coordinatenachsen wirkenden nenten der Kraft R hat man

V) $$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv_x}{dt} = m v_x \frac{dv_x}{dx},$$

VI) $$Y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dv_y}{dt} = m v_y \frac{dv_y}{dy},$$

VII) $$Z = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{dv_z}{dt} = m v_z \frac{dv_z}{dz}.$$

Die Resultante selbst ist ihrer Grösse nach bestimmt durch

VIII) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

l ihrer Richtung nach durch

IX) $$\cos(R, X) = \frac{X}{R},$$

X) $$\cos(R, Y) = \frac{Y}{R},$$

XI) $$\cos(R, Z) = \frac{Z}{R}.$$

rlegt man R, anstatt in drei Seitenkräfte X, Y, Z, in eine zur Bahn ıgentiale Componente T und in eine normale N, so gilt für diese

XII) $$T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = mv\frac{dv}{ds}$$

d

XIII) $$N = m\frac{v^2}{\varrho},$$

›bei

XIV) $$v = \frac{ds}{dt}$$

lange positiv, als s wächst und wobei ferner ϱ der Krümmungshalbsser der Bahn.

Von Nutzen ist noch folgende Bemerkung:

Aus V) bis VII) folgt (für $m = 1$)

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 2\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{d\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}{dt} = 2\,\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{dt},$$

XV) $$dv^2 = 2(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

ıd nun X, Y, Z die partiellen Differentialquotienten einer Function (x, y, z) — der sogenannten Kräftefunction —, so hat man weiter

$$dv^2 = 2\,dF(x, y, z),$$

$$v^2 = 2\,F(x, y, z) + Const.$$

d, wenn man weiss, dass der Punkt an der Stelle a, b, c die Gehwindigkeit k besitzt,

XVI) $$v^2 - k^2 = 2F(x, y, z) - 2F(a, b, c).$$

ess ist bekanntlich die Gleichung der lebendigen Kraft für ıen freien materiellen Punkt und leicht in Worte zu fassen.

Die vorstehenden Gleichungen reichen aus zur Lösung der Aufgaben des zweiten Capitels, in denen übrigens, wie früher, immer $m = 1$ vorausgesetzt ist, wenn nicht das Gegentheil gesagt wird.

Wie die Integrationsconstanten zu bestimmen sind, und wie sich die Rechnung vereinfacht, wenn die Bewegung nicht im Raume, sondern in der Ebene erfolgt, ist selbstverständlich.

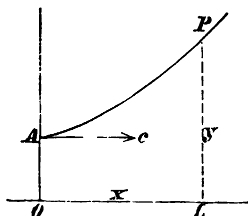
I. Krummlinige Bewegungen in der Ebene.

A. Vorgeschrieben die Art der Bahn, in welcher sich der Punkt bewegen soll, oder die Geschwindigkeiten desselben, oder beides.

a) Bewegungen ohne Widerstand.

Aufgabe 53. Von der Stelle A aus (Fig. 6) wird ein Punkt horizontal mit der Geschwindigkeit c fortgeworfen. Auf ihn wirkt nichts weiter als eine gewisse Kraft Y vertical nach oben (im Sinne der positiven y). Man soll berechnen

Fig. 6.



I. wie dieselbe beschaffen sein muss, wenn sich der Punkt in der Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

aufwärts bewegen soll;

II. welche Achsengeschwindigkeiten v_x, v_y und welche Bahngeschwindigkeit v an jeder Stelle xy herrschen.

Lösung. Die Gleichung VI) der vorstehenden Erklärung liefert

$$Y = \frac{a b c^2}{\sqrt{a^2 + x^2}^3},$$

oder das gleichwerthige

$$Y = \frac{b^4 c^2}{a^2} \frac{1}{y^3}.$$

Es muss also die Kraft Y der dritten Potenz des Abstandes y vom Horizonte OL umgekehrt proportional sein und für $y = 1$ die Intensität $\frac{b^4 c^2}{a^2}$ besitzen.

In horizontaler Richtung ist die Geschwindigkeit constant, nämlich

$$v_x = c;$$

in verticaler ist sie

$$v_y = \frac{b\,c}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{b\,c}{a} \frac{\sqrt{y^2-b^2}}{y} = \frac{b^2 c}{a^2} \frac{x}{y};$$

in der Bahn

$$v = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{k^2 x^2 + a^4}{a^2+x^2}} = \frac{c}{a} \frac{\sqrt{k^2 y^2 - b^4}}{y} = \frac{b\,c}{a^2 y} \sqrt{k^2 x^2 + a^4},$$

wobei k die lineare Excentricität der Hyperbel bezeichnet.

Aufgabe 54. Welcher Art muss die Kraft Y sein, welche Bahngeschwindigkeit v hat der Punkt und wie viel Zeit t braucht er, um bis an die Stelle xy zu kommen, wenn das Aufsteigen in der Kettenlinie

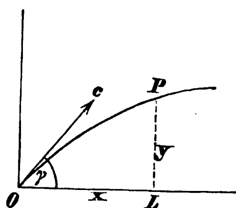
$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

erfolgen soll, übrigens aber die Verhältnisse so sind, wie in der vorigen Aufgabe?

Lösung. Die Kraft Y muss der erstiegenen Höhe y proportional sein und für $y = 1$ die Intensität $\left(\frac{c}{k}\right)^2$ haben. Die Bahngeschwindigkeit wächst ebenfalls in demselben Verhältnisse wie die Höhe und ist für die Einheit der letzteren gleich $\frac{c}{k}$. An die Stelle xy kommt der Punkt nach Verlauf der Zeit $\frac{x}{c}$, was man auch ohne Rechnung übersieht.

Aufgabe 55. Mit der Anfangsgeschwindigkeit c und unter dem Winkel γ gegen die x-Achse (Fig. 7) wird ein Punkt vom Coordinatenanfange aus fortgeworfen. Es wirkt auf ihn nichts weiter als eine Kraft Y im Sinne der positiven Ordinaten.

Fig. 7.



Wie muss dieselbe beschaffen sein, wenn die Bewegung in der vorgeschriebenen Curve

$$y = f(x)$$

erfolgen soll? Wie gross ist die Bahngeschwindigkeit v und welche Zeit t ist nöthig zur Erreichung der Stelle xy?

Lösung. Man findet leicht

$$Y = c^2 \cos^2 \gamma\, f''(x),$$

wobei $f''(x) = \frac{d^2 y}{d x^2}$.

Ferner

$$v = c \cos \gamma \sqrt{1 + [f'(x)]^2};$$

endlich

$$t = \frac{x}{c \cos \gamma},$$

welches letztere den auch ohne Rechnung einleuchtenden Satz ausspricht, dass der Punkt sich in horizontaler Richtung gleichförmig bewegt, wie auch die Bahn und die Kraft Y beschaffen sein mögen.

Aufgabe 56. Die Bewegung eines Punktes erfolgt derartig, dass die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Coordinaten seines Ortes zu jeder Zeit t die Werthe

$$x = A\,(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}),$$
$$y = B\,(e^{\beta t} - e^{-\beta t})$$

haben, in welchen Ausdrücken A, B, α und β bekannte Constanten sind.

Welche im Sinne der positiven x und y wirkenden Kräfte X und Y rufen diese Bewegung hervor?

Lösung. Die Kräfte müssen der Abscisse, bezüglich der Ordinate, proportional sein und für die Einheiten dieser Strecken die Intensitäten α^2, bezüglich β^2, besitzen. ($X = \alpha^2 x$, $Y = \beta^2 y$.)

Aufgabe 57. Es soll sich ein materieller Punkt auf der logarithmischen Spirale

$$r = a c^\theta$$

bewegen, und zwar in Folge einer nach dem asymptotischen Centrum gerichteten Anziehung R.

In welcher Weise muss dieselbe von der Entfernung r abhängen, und mit welcher Bahngeschwindigkeit v bewegt sich der Punkt?

Lösung. Die Benutzung der Gleichungen XII) und XIII) der vorstehenden „Erklärung" führt hier zu den Resultaten

$$R = \frac{k^2}{r^3}$$

und

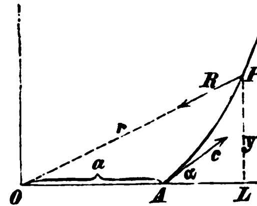
$$v = \frac{k}{r},$$

in welchen k denjenigen Leitstrahl bedeutet, für den die Geschwindigkeit der Einheit gleich ist.

Die Anziehung muss also der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sein. Die Bahngeschwindigkeit nimmt in demselben Verhältnisse zu, in welchem die Radienvectoren kleiner werden.

Aufgabe 58. Von der Stelle A aus (Fig. 8) wird zur Zeit 0 unter a Winkel α ein Punkt mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfen. bewegt sich in Folge einer nach dem ten Coordinatenanfange O gerichteten ziehung derartig, dass seine Achsen- ›chwindigkeiten zu jeder Zeit t die ›rthe

Fig. 8.



$$v_x = c \cos \alpha \cos kt - ak \sin kt,$$
$$v_y = c \sin \alpha \cos kt$$

›en. Man soll diese Bewegung unter- ›hen, nämlich ermitteln, wo sich der nkt zur Zeit t befindet, in was für einer Bahn er läuft und wie die ziehung beschaffen ist.

Lösung. Für die Abscisse des Ortes findet man

$$x = \frac{c \cos \alpha}{k} \sin kt + a \cos kt;$$

die Ordinate

$$y = \frac{c \sin \alpha}{k} \sin kt.$$

raus folgt zunächst, dass die Bahn eine Kegelschnittslinie sein ss. Untersucht man ihre Gleichung

$$\text{›}^2 \sin^2 \alpha)\, x^2 + (c^2 \cos^2 \alpha + a^2 k^2)\, y^2 - (c^2 \sin 2\alpha)\, xy - a^2 c^2 \sin^2 \alpha = 0$$

h den bekannten Regeln der analytischen Geometrie, so ergiebt ›, dass die Curve eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt im Coordi- ›nanfange O liegt und deren grosse Achse mit OA einen durch die ichung

$$\tan 2\beta = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{c^2 \cos 2\alpha + a^2 k^2}$$

timmten Winkel β einschliesst.

Ferner findet man für die im Sinne der positiven x wirkende Com- ›ente der beschleunigenden Kraft R

$$X = -k^2 x;$$

die nach Richtung der positiven y thätige

$$Y = -k^2 y.$$

her ist die Anziehung nach dem Centrum O

$$R = k^2 r,$$

o dem Abstande proportional und für die Einheit desselben gleich k^2.

Aufgabe 59. Die Achsengeschwindigkeiten eines Punktes haben an jeder Stelle xy der Bahn die Werthe

$$v_x = \sqrt{A + \alpha x^2}^3,$$
$$v_y = \sqrt{B + \beta y^2}^3,$$

in welchen A, B, α und β bekannte positive Constanten sind. Die Bewegung hat zur Zeit 0 im Coordinatenanfange begonnen.

Welcher Art sind die Kräfte X und Y? Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t? In was für einer Linie läuft er?

Lösung. Die wirkenden Kräfte ergeben sich zu

$$X = 3\alpha x\,(A + \alpha x^2)^2 \text{ und } Y = 3\beta y\,(B + \beta y^2)^2;$$

die Coordinaten des Ortes sind

$$x = \frac{A\sqrt{A}\,t}{\sqrt{1 - A^2\alpha t^2}} \text{ und } y = \frac{B\sqrt{B}\,t}{\sqrt{1 - B^2\beta t^2}}.$$

Die Bahn hat die Gleichung

$$y = \frac{B\sqrt{B}\,x}{\sqrt{A^3 + (A^2\alpha - B^2\beta)\,x^2}}.$$

b) Bewegungen mit Widerstand.

Aufgabe 60. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem kommt einem sich bewegenden Punkte die Bahngleichung

$$y = \frac{g + bk}{ak}x - \frac{g}{k^2}\,l\,\frac{a}{a - kx}$$

zu, in welcher a, b, k, g bekannt und unveränderlich sind. Er hat seinen Lauf zur Zeit 0 im Coordinatenanfange begonnen und besitzt zu jeder Zeit t im Sinne der positiven x die Geschwindigkeit

$$v_x = a e^{-kt}.$$

Es sollen die Coordinaten x und y des Ortes als Functionen von t bestimmt werden; desgleichen die Geschwindigkeiten v_y und v. Ferner soll man die Natur der diese Bewegung erzeugenden Kräfte X und Y ermitteln; endlich auch untersuchen, wie eine vertical nach unten (im Sinne der negativen y) gerichtete Kraft und ein nach der Bahntangente wirkender Widerstand beschaffen sein müssten, um Dasselbe hervorzubringen.

Lösung. Zur Zeit t befindet sich der Punkt an der Stelle

$$x = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$y = \frac{g + bk}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$$

ıd hat die Geschwindigkeiten

$$v_y = \frac{1}{k}[(g + bk)e^{-kt} - g],$$

$$v = \frac{1}{k}\sqrt{a^2k^2e^{-2kt} + [(g + bk)e^{-kt} - g]^2}.$$

ıe im Sinne der positiven Coordinaten vorhandenen Kräfte sind

$$X = -ake^{-kt} = -kv_x = -kv\cos\tau,$$

$$Y = -(g + bk)e^{-kt} = -kv_y - g = -kv\sin\tau - g.$$

Soll die Bewegung erzeugt werden durch die Wirkung einer in der :chtung der negativen y thätigen Kraft und durch die eines Wider-ındes, so muss erstere gleich g sein, letzterer aber gleich kv, also r Geschwindigkeit proportional. (Wurf im widerstehenden Mittel.)

Aufgabe 61. In einem Mittel, welches proportional dem Quadrate r Bahngeschwindigkeit v derartig widersteht, dass für $v = 1$ der ıderstand den Werth b besitzt, soll sich ein materieller Punkt auf : logarithmischen Spirale

$$r = ae^{\theta}$$

Folge einer Anziehung R bewegen, welche nach dem asymptotischen nkte gerichtet ist. Im Abstande a von demselben soll — und zwar :h innen — die Geschwindigkeit c herrschen. Man verlangt zu ısen

I. in welcher Weise diese Anziehung R von der Entfernung r des anziehenden Centrums abhängt;

II. mit welcher Geschwindigkeit v der Punkt läuft;

III. wie sich die Resultate vereinfachen, wenn der Widerstand gleich Null ist.

Lösung. Die Anziehung ist nach der Gleichung

$$R = k^2\frac{e^{2\sqrt{2b}\,r}}{r^3} = a^2c^2\frac{e^{-2\sqrt{2b}(a-r)}}{r^3}$$

:änderlich und im Abstande r liegt die Geschwindigkeit

$$v = k\frac{e^{\sqrt{2b}\,r}}{r} = ac\frac{e^{-\sqrt{2b}(a-r)}}{r}$$

r.

Wenn das Mittel nicht widersteht, so hat b den Werth Null, womit die Resultate in die der Lösung der Aufgabe 57 übergehen. (Vergleiche diese.)

Aufgabe 62. Ein schwerer Punkt ist in einem Mittel, welches proportional einer noch nicht bekannten Potenz der Bahngeschwindigkeit v widersteht und für die Einheit von v den Widerstand k leistet, schief in die Höhe geworfen worden. Seine Bewegung wird auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Ursprung O mit dem Anfangspunkte der Bahn zusammenfällt, dessen x-Achse horizontal und dessen y-Achse vertical liegt. Er läuft so, dass seine Achsengeschwindigkeit in der Richtung der x immer

$$v_x = A e^{-ks}$$

ist, worin A eine Constante und s die von O aus gezählte Bahnlänge.

Man soll berechnen, welcher Potenz von v der Widerstand proportional ist.

Lösung. Die eine Differentialgleichung der Bewegung lautet

$$\frac{dv_x}{dt} = -k v^n \frac{dx}{ds}.$$

Da sich nun aus $v_x = A e^{-ks}$

$$\frac{dv_x}{dt} = -k v^2 \frac{dx}{ds}$$

herleiten lässt, so erkennt man, dass das Mittel dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional widersteht.

Aufgabe 63. Senkrecht nach oben (im Sinne der positiven y) wirkt auf einen materiellen Punkt eine constante Kraft K. Ausserdem ist ein Mittelwiderstand W in der Richtung der Bahntangente thätig.

Welche Beziehung muss zwischen K und W bestehen, wenn das Aufsteigen in der Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

erfolgen soll? Mit welcher Geschwindigkeit v läuft der Punkt in dieser Bahn?

Lösung. Wenn man die Gleichungen XII) und XIII) der zu Capitel II gegebenen „Erklärung“ benutzt und gehörig die einfachen Beziehungen beachtet, welche für die Kettenlinie zwischen der Ordinate y, dem vom Scheitel an gerechneten Bogen s, dem Krümmungshalbmesser ϱ, dem Tangentenwinkel τ u. s. w. bestehen, so findet man leicht

I. dass der Mittelwiderstand W sich zu der Kraft K verhalten muss, wie der Bogen s zu dem Doppelten der Ordinate y;

II. dass die Geschwindigkeit v der Quadratwurzel aus dem Producte Ky gleich ist.

Aufgabe 64. Das Aufsteigen soll, wie bei der vorigen Aufgabe, in der Kettenlinie

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

erfolgen. Statt der constanten Kraft K aber wirkt eine veränderliche Y; ferner in der Richtung der Bahntangente der Widerstand

$$W = Av^2,$$

wobei A eine bekannte Constante.

Man soll Y und v als Functionen von y und s (letzteres vom Scheitel aus gezählt) bestimmen; ferner angeben, wie die Resultate lauten, wenn die Bewegung im nicht widerstehenden Mittel vor sich geht.

Lösung. Auf dem bei der Lösung der vorigen Aufgabe angegebenen Wege gelangt man zu den Ergebnissen

$$Y = Bye^{-2As}$$

und

$$v = \sqrt{B}\, ye^{-As}.$$

Die Integrationsconstante B ist hierbei bestimmt, wenn man für irgend ein y und s entweder v oder Y kennt. Ist z. B. festgesetzt, dass im Scheitel $v = c$ sein soll, so liefert die zweite Gleichung $B = \frac{c^2}{k^2}$.

Liegt kein Widerstand vor, so hat man

$$Y = By \text{ und } v = \sqrt{B}\, y,$$

also zwei sehr einfache Gesetze.

B. Vorgeschrieben die Kräfte, welche die Bewegung erzeugen.

a) Bewegungen ohne Widerstand.

Aufgabe 65. Unter dem Erhebungswinkel γ (vergl. Fig. 7) wird ein Körper (Punkt von der Masse 1) mit der Anfangsgeschwindigkeit c fortgeworfen. Auf denselben wirkt nur die Schwere. Gefragt wird:

I. Welches sind die Werthe seiner Geschwindigkeiten in horizontaler Richtung, in verticaler und in der Bahn selbst, zur Zeit t? Wie

ändern sich dieselben und wann erreichen sie ihre grössten und klein Werthe?

II. Wo befindet sich der Körper zur Zeit t?

III. In was für einer Bahn fliegt er? Wie liegt sie und wel sind die Werthe ihrer Bestimmungsstücken?

IV. Wie gross ist die Wurfweite und wie gross die Wurfhöhe

V. Unter welchem Winkel muss man werfen, wenn die Er am grössten sein soll? Welches ist ihr Maximalwerth und welches zugehörige der Wurfhöhe?

VI. Für welche Erhebungswinkel sind die Wurfweiten gleich gr

VII. Nach wie langer Zeit kommt der Körper im Punkte x und in welcher durchfliegt er die ganze Bahn?

Lösung. I. Die Differentialgleichungen der Bewegung lie zunächst

$$v_x = c \cos \gamma$$

und

$$v_y = c \sin \gamma - gt.$$

Die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung ist hiernach un änderlich, was man übrigens auch ohne Rechnung erkennt. Senkr nach oben hat der Körper, wie die zweite Gleichung lehrt, anfäng die Geschwindigkeit $c \sin \gamma$. Dieselbe nimmt fortwährend ab, wir der Zeit

$$t = \frac{c \sin \gamma}{g}$$

zu Null, ist nachher negativ und nimmt dem absoluten Werthe mehr und mehr zu.

In der Bahn herrscht die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{c^2 - 2gct \sin \gamma + g^2 t^2},$$

also eine solche, welche im Anfange abnimmt, zur Zeit $t = \frac{c \sin \gamma}{g}$ Minimum, nämlich $c \cos \gamma$, erreicht und dann sich wieder vergrös

II. Die Coordinaten des Ortes des Körpers sind

$$x = ct \cos \gamma,$$

was auch ohne Rechnung klar ist, und

$$y = ct \sin \gamma - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Hiernach lässt sich das vorstehende v auch durch

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy}$$

ausdrücken.

III. Als Gleichung der Bahn findet man

$$y = x \tan\gamma - \frac{g x^2}{2 c^2 \cos^2\gamma}$$

oder, wenn mit h die zu c gehörende Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ bezeichnet wird,

$$y = x \tan\gamma - \frac{x^2 \sec^2\gamma}{4h}.$$

Die Bewegung erfolgt also in einer gemeinen Parabel, deren Achse vertical steht. Um zu erfahren, wo der Scheitel liegt, welches der Halbparameter ist etc., bringt man die Bahngleichung auf die Form $\eta^2 = 2p\,\xi$ und erhält hierbei

$$\frac{2c^2\cos^2\gamma}{g}\left(\frac{c^2\sin^2\gamma}{2g} - y\right) = \left(x - \frac{c^2\sin\gamma\cos\gamma}{g}\right)^2.$$

Die Coordinaten des Scheitels sind daher

$$a = \frac{c^2\sin\gamma\cos\gamma}{g} = \frac{c^2\sin 2\gamma}{2g} = h\sin 2\gamma$$

und

$$b = \frac{c^2\sin^2\gamma}{2g} = h\sin^2\gamma.$$

Der Halbparameter ist

$$p = \frac{c^2\cos^2\gamma}{g};$$

die Entfernung des Brennpunktes vom Horizonte (x-Achse) hat den Werth

$$b_1 = \frac{c^2(\sin^2\gamma - \cos^2\gamma)}{2g} = -\frac{c^2\cos 2\gamma}{2g}.$$

Die Leitlinie der Parabel liegt wagerecht und in der Höhe

$$h = \frac{c^2}{2g}.$$

Von ihr herunterfallend würde der Körper hiernach seine Anfangsgeschwindigkeit c erlangt haben.

Mit Benutzung von b kann man nun die Bahngeschwindigkeit auch noch durch die Gleichung

$$v = \sqrt{c^2\cos^2\gamma + 2g(b - y)}$$

ausdrücken, was späterhin wieder gebraucht wird.

IV. Die Wurfweite ist das Doppelte von a; die Wurfhöhe identisch mit b. Die Erstere folgt übrigens auch aus der ursprünglichen Form der Bahngleichung, wenn man y gleich Null nimmt; die Letztere dann aus dem vorstehenden Ausdrucke für die Ordinate des Ortes.

V. Unter 45 Grad kann man am weitesten werfen, nämlich eine Strecke, welche doppelt so lang ist, wie die zur Anfangsgeschwindigkeit c gehörende Geschwindigkeitshöhe h. Hierbei beträgt die Wurfhöhe die Hälfte von h.

VI. Gleiche Wurfweiten liegen für solche Erhebungswinkel vor, welche um gleich viel von 45 Grad abweichen, die also Complementwinkel sind.

VII. Zur Erreichung der Stelle xy braucht der Körper die Zeit

$$t = \frac{x}{c \cos \gamma};$$

zum Durchfliegen der ganzen Bahn

$$T = \frac{2 c \sin \gamma}{g}.$$

Aufgabe 66. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit c muss man werfen (Aufg. 65), um bei dem vorgeschriebenen Erhebungswinkel γ diejenige Stelle zu treffen, deren Coordinaten ξ und η sind?

Lösung. Unter Benutzung der Lösung der vorhergehenden Aufgabe findet man

$$c = \frac{\xi}{\cos \gamma} \sqrt{\frac{g}{2(\xi \tan \gamma - \eta)}}.$$

Diess enthält die übrigens selbstverständliche Bedingung

$$\frac{\eta}{\xi} < \tan \gamma.$$

Für $\frac{\eta}{\xi} = \tan \gamma$ muss $c = \infty$ sein; für $\frac{\eta}{\xi} > \tan \gamma$ ist es imaginär.

Aufgabe 67. Wie gross muss der Erhebungswinkel γ genommen werden (Nr. 65), wenn bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c die Stelle $\xi \eta$ getroffen werden soll?

Lösung. Der Winkel γ ist durch die Gleichung

$$\tan \gamma = \frac{1}{\xi g}\left(c^2 \pm \sqrt{c^4 - 2 c^2 g \eta - g^2 \xi^2}\right)$$

bestimmt; oder, wenn man die zu c gehörende Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ einführt, durch

$$\tan\gamma = \frac{1}{\xi}\,[2h \pm \sqrt{4h(h-\eta)-\xi^2}].$$

Es giebt daher im Allgemeinen zwei Winkel, unter denen die Stelle $\xi\eta$ getroffen werden kann. Für

$$\xi^2 = 4h(h-\eta)$$

fallen dieselben zusammen; für noch grössere ξ ist das Treffen unmöglich.

Man vergleiche hierüber die Lösung der Aufgabe 72.

Aufgabe 68. In welcher Weise muss von O aus (Fig. 7 bei Nr. 55) geworfen werden (Aufg. 65), wenn die durch die Coordinaten ξ und η gegebene Stelle einer vertical stehenden Mauer von dem Geschosse unter einem rechten Winkel getroffen werden soll? Wie viel Zeit verstreicht bis zum Auftreffen?

Lösung. Der Erhebungswinkel γ, unter welchem man werfen muss, ist bestimmt durch

$$\tan\gamma = 2\frac{\eta}{\xi},$$

es muss also nach einem doppelt so hoch gelegenen Punkte gezielt werden.

Ferner muss das Geschoss mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{g(\xi^2+4\eta^2)}{2\eta}}$$

abfliegen. Dann schlägt es nach der Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2\eta}{g}}$$

rechtwinklig ein.

Aufgabe 69. Der geworfene Körper (Aufg. 65) soll nach der vorgeschriebenen Zeit t an der Stelle $\xi\eta$ einschlagen. Unter welchem Erhebungswinkel γ und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit c muss er von O aus (Fig. 7) fortgeschleudert werden?

Lösung. Der Winkel ist bestimmt durch

$$\tan\gamma = \frac{2\eta + gt^2}{2\xi};$$

die Anfangsgeschwindigkeit durch

$$c = \frac{\sqrt{4\xi^2+(2\eta+gt^2)^2}}{2t}.$$

Aufgabe 70. Für den in Aufgabe 65 behandelten Wurf s rechnet werden

I. der Inhalt der von der Bahn einerseits und von dem Ho andererseits begrenzten Fläche;

II. derjenige Werth des Erhebungswinkels γ, für welchen Inhalt am grössten ist;

III. die Länge s der ganzen (über dem Horizonte liegenden)

IV. die für $\gamma = 90^0$ und für $\gamma = 0^0$ aus diesem allger Werthe von s folgenden Bahnlängen s_{90} und s_0.

Lösung. Die gesuchte Fläche ist

$$F = \frac{2\,c^4 \sin^3\gamma \cos\gamma}{3\,g^2}$$

und erreicht für

$$\gamma = 60^0$$

ihren Maximalwerth, nämlich $\dfrac{c^4\sqrt{3}}{8\,g^2}$.

Die Bahn besitzt die Länge

$$s = \frac{c^2}{g}\left(\sin\gamma + \cos^2\gamma\; l\,\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\right),$$

wofür auch

$$s = \frac{c^2}{g}\left(\sin\gamma + \tfrac{1}{2}\cos^2\gamma\; l\,\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}\right)$$

geschrieben werden kann.

Setzt man in diesem Ausdrucke $\gamma = 90^0$, so entsteht zu $s_{90} = \dfrac{c^2}{g}(1 + 0 \,.\, \infty)$, was unbestimmt ist, bei näherer Untersuchun

$$s_{90} = \frac{c^2}{g}.$$

Für $\gamma = 0^0$ ergiebt sich sofort

$$s_0 = 0.$$

Das letzte Resultat ist selbstverständlich, das vorhergehend der Lösung der vierten Aufgabe bekannt.

Aufgabe 71. Welcher Art ist der geometrische Ort der S aller derjenigen Wurfparabeln, die beschrieben werden, wenn materielle Punkte mit lauter verschiedenen Anfangsgeschwindigl aber immer in derselben Richtung, schief aufwärts wirft?

Lösung. Mit Benutzung der Lösung der Aufgabe 65 finde leicht, dass der gesuchte geometrische Ort eine Gerade ist, die

den Anfangspunkt der Bewegung geht und mit dem Horizonte einen Winkel bildet, dessen Tangente halb so gross ist wie die des Erhebungswinkels γ.

Aufgabe 72. Von einer und derselben Stelle O aus (Fig. 7) werden in der nämlichen Verticalebene materielle Punkte mit gleichen Anfangsgeschwindigkeiten (c), aber unter lauter verschiedenen Winkeln, in die Höhe geworfen. Sie unterliegen nur der Wirkung ihrer Schwere. Berechnet soll werden

I. die Art des geometrischen Ortes der Scheitel aller entstehenden Wurfparabeln;

II. die Natur und die Lage der diese Parabeln einhüllenden Curve;

III. der geometrische Ort aller derjenigen Stellen, an welchen sich die geworfenen Punkte zu einer und derselben Zeit t befinden;

IV. die allen diesen Punkten in der nämlichen Höhe eigene Bahngeschwindigkeit.

Lösung. Das in der Lösung der 65ten Aufgabe Enthaltene führt auch hier schnell zu den verlangten Resultaten. Zunächst ergiebt sich

$$x^2 = 4y(h-y),$$

(wobei h die zur Anfangsgeschwindigkeit c gehörende Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ ist) als Gleichung des geometrischen Ortes der Scheitel der Wurfparabeln. Da es auf die Form

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y-\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right)^2 = 1$$

gebracht werden kann, so erkennt man, dass der gesuchte geometrische Ort eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt senkrecht über O in der Höhe $\frac{1}{2}h$ liegt, deren grosse und kleine Achse horizontal, bezüglich vertical, gerichtet sind und die Längen $2h$, bezüglich h, besitzen.

Als Gleichung der Einhüllenden findet man

$$x^2 = 4h(h-y).$$

Sie ist also eine Parabel, deren Achse vertical steht, deren Scheitel in der Höhe h über O liegt und deren Halbparameter $2h$, also $\frac{c^2}{g}$ ist.

Der geometrische Ort derjenigen Stellen, an welchen sich die geworfenen Punkte zu der nämlichen Zeit t befinden, besitzt die Gleichung

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 = (ct)^2;$$

er ist also ein mit dem Halbmesser ct beschriebener **Kreis**, dessen Mittelpunkt im Abstande $\frac{1}{2}gt^2$ senkrecht unter O liegt.

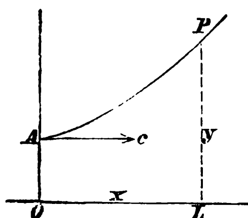
Als Bahngeschwindigkeit v in der Höhe y ergiebt sich für jeden der Punkte

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy};$$

sie ist also für alle Punkte in demselben Abstande vom Horizonte gleich gross.

Aufgabe 72. Auf einen materiellen Punkt wirkt nichts weiter als vertical nach oben (im Sinne der positiven y) eine Kraft, welche der Ordinate y (Fig. 9) proportional ist und für die Einheit derselben die Beschleunigung $\frac{c^2}{k^2}$ ertheilt. Der Punkt ist anfänglich von A aus, welches die Ordinate k hat, mit der Geschwindigkeit c horizontal fortgeworfen worden. Man soll ermitteln

Fig. 9.



I. seine Geschwindigkeiten v_x, v_y und v an der Stelle xy;

II. den Ort, an welchem er sich zur Zeit t befindet;

III. die Art, die Dimensionen und die Lage der Bahn, in welcher er aufsteigt;

IV. die Geschwindigkeiten v_x, v_y und v, die er zur Zeit t besitzt.

Lösung. Es ergiebt sich durch Benutzung der Gleichungen V) und VI) der vorstehenden „Erklärung" zu Capitel II

$$v_x = c$$

und

$$v_y = \frac{c}{k}\sqrt{y^2 - k^2}.$$

Hieraus aber

$$v = \frac{c}{k}y.$$

In horizontaler Richtung hat der geworfene Punkt also unveränderlich die Anfangsgeschwindigkeit; in der Bahn hingegen eine der Ordinate proportionale.

Sodann erhält man

$$x = ct$$

und

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{ct}{k}} + e^{-\frac{ct}{k}}\right)$$

als Coordinaten desjenigen Ortes, an welchem er sich zur Zeit t befindet.

Die Bahn, in der er fliegt, hat daher die Gleichung

$$y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

ist also eine gemeine Kettenlinie, deren Achse vertical steht, deren Scheitel in A liegt und deren Parameter gleich k ist.

Zur Zeit t sind die Geschwindigkeiten

$$v_x=c,$$

$$v_y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{ct}{k}}-e^{-\frac{ct}{k}}\right),$$

$$v=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{ct}{k}}+e^{-\frac{ct}{k}}\right).$$

Anmerkung. Der Werth $v=\frac{c}{k}y$ kann auch unmittelbar, nämlich durch Benutzung der am Ende der „Erklärung" zu Capitel II erwähnten Gleichung

$$dv^2=2\,(Xdx+Ydy+Zdz)$$

erhalten werden. Es möge diese directe Herleitungsweise auch bei der Lösung der nachfolgenden Aufgaben gehörige Beachtung finden.

Aufgabe 74. Die auf den geworfenen Punkt wirkende beschleunigende Kraft ist der dritten Potenz der Ordinate umgekehrt proportional und für die Einheit derselben gleich k^2. A liegt in der Höhe h über 0. Alles Uebrige ist wie bei der vorhergehenden Aufgabe. Die Lösung wird in demselben Umfange verlangt, doch mit Angabe der Grenzwerthe, welchen sich die Geschwindigkeiten nähern.

Lösung. An der Stelle xy der Bahn ist

$$v_x=c,$$

$$v_y=\frac{k}{h}\cdot\frac{\sqrt{y^2-h^2}}{y}=k\sqrt{\frac{1}{h^2}-\frac{1}{y^2}},$$

$$v=\frac{1}{h}\cdot\frac{\sqrt{(c^2h^2+k^2)\,y^2-k^2h^2}}{y}=\sqrt{c^2+\left(\frac{k}{h}\right)^2-\left(\frac{k}{y}\right)^2}.$$

Für in's Unendliche wachsende Ordinaten nähern sich die beiden letzten Ausdrücke den Grenzwerthen $\frac{k}{h}$, bezüglich $\frac{\sqrt{c^2h^2+k^2}}{h}$.

Der Ort, an welchem sich der Punkt zur Zeit t befindet, wir durch die Coordinaten

$$x = ct$$

und

$$y = \frac{1}{h}\sqrt{k^2 t^2 + h^4}$$

bestimmt.

Die Bahn besitzt die Gleichung

$$\frac{y^2}{h^2} - \frac{k^2 x^2}{c^2 h^4} = 1,$$

ist also eine Hyperbel, deren Hauptachse mit OA zusammenfällt und die Länge $2h$ hat, deren Scheitel in A liegt und deren Nebenachse die Länge $2\frac{ch^2}{k}$ besitzt.

Zur Zeit t herrschen die Geschwindigkeiten

$$v_x = c,$$

$$v_y = \frac{k^2}{h} \cdot \frac{t}{\sqrt{k^2 t^2 + h^4}},$$

$$v = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{c^2 h^6 + k^2 (c^2 h^2 + k^2) t^2}{h^4 + k^2 t^2}}.$$

Für $t = \infty$ nähern sich selbstverständlich auch diese Werthe von v_y und v den oben angegebenen Grenzen.

Aufgabe 75. Von der Stelle O des Horizontes aus wird ein Punkt mit der Anfangsgeschwindigkeit c unter dem Neigungswinkel α in die Höhe geworfen. Es wirkt auf ihn nur eine vertical nach unten gerichtete Kraft

$$Y = Ce^t,$$

C constant und die Zeit t vom Beginne der Bewegung an gezählt.

Bestimmt soll werden, wo sich der Punkt zur Zeit t befindet, welche Geschwindigkeiten (v_x, v_y, v) er in diesem Augenblicke hat und in was für einer Bahn er läuft.

Lösung. Man gelangt leicht zu folgenden Resultaten, die auf ein Coordinatensystem bezogen sind, dessen Anfang mit O zusammenfällt, dessen x-Achse horizontal liegt und dessen y-Achse senkrecht nach oben genommen ist:

Coordinaten derjenigen Stelle, an welcher sich der Punkt zur Zeit t befindet:

$$x = ct \cos \alpha,$$

$$y = (c \sin \alpha + C)\, t + C\,(1 - e^t);$$

Geschwindigkeiten desselben:

$$v_x = c\cos\alpha,$$
$$v_y = (c\sin\alpha + C) - Ce^t,$$
$$v = \sqrt{c^2 + 2c\sin\alpha\, C(1-e^t) + C^2(1-e^t)^2};$$

Gleichung seiner Bahn:

$$y = \frac{c\sin\alpha + C}{c\cos\alpha}\, x + C\left(1 - e^{\frac{x}{c\cos\alpha}}\right).$$

Ein Vergleichen mit der Lösung der 87ten Aufgabe lehrt, dass diese Bahn derjenigen ganz ähnlich ist, die der Punkt beschreibt, wenn er bei Einwirkung der Schwere unter sehr kleinem Erhebungswinkel α in einem Mittel geworfen wird, welches proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit widersteht.

Aufgabe 76. Der bewegliche Punkt wird von zwei Kräften beeinflusst; die eine derselben wirkt in horizontaler Richtung und besitzt die unveränderliche Intensität A; die andere ist vertical nach oben thätig und constant gleich B. Anfänglich (zur Zeit 0) hat der Punkt sich in Ruhe befunden. Es soll seine Bewegung in demselben Umfange untersucht werden wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Lösung. Die Geschwindigkeiten in horizontaler Richtung, vertical nach oben und in der Bahn sind der verflossenen Zeit proportional, nämlich

$$v_x = At, \qquad v_y = Bt, \qquad v = \sqrt{A^2 + B^2}\, t.$$

Die Coordinaten des Ortes nehmen zu wie die Quadrate der Zeiten. Legt man die x-Achse im Sinne der ersten Kraft, die y-Achse in dem der zweiten und nimmt die ursprüngliche Lage des Punktes als Coordinatenanfang, so ist

$$x = \tfrac{1}{2} At^2 \text{ und } y = \tfrac{1}{2} Bt^2.$$

Die Bewegung erfolgt geradlinig und zwar unter dem mit dem Horizonte gebildeten Winkel $arctan\,\frac{B}{A}$.

Aufgabe 77. Die Umstände sind dieselben wie bei der vorigen Aufgabe, doch ist der Punkt anfänglich nicht in Ruhe, sondern besitzt eine Geschwindigkeit c, deren Richtung den Winkel γ mit dem Horizonte einschliesst.

Lösung. Wie bei Nr. 76 kommt man auf

$$v_x = At + c\cos\gamma,$$
$$v_y = Bt + c\sin\gamma,$$
$$v = \sqrt{(A^2+B^2)t^2 + 2c\,(A\cos\gamma + B\sin\gamma)t + c^2}.$$

Unter Beibehaltung des dort benutzten Coordinatensystems ferner auf

$$x = \tfrac{1}{2}At^2 + ct\cos\gamma,$$
$$y = \tfrac{1}{2}Bt^2 + ct\sin\gamma.$$

Hieraus folgt, unter Benutzung der Abkürzung

$$c\,(A\sin\gamma - B\cos\gamma) = K,$$

als Gleichung der Bahn

$$AB^2x^2 + A^3y^2 - 2A^2Bxy - 2AKcx\sin\gamma + 2AKcy\cos\gamma = 0.$$

Die Bewegung erfolgt also in einer Kegelschnittslinie und zwar, wie die Coefficienten von x^2, y^2 und xy zeigen, in einer Parabel.

Aufgabe 78. Vom Coordinatenanfange O eines rechtwinkligen Systemes aus wird ein Punkt (zur Zeit 0) mit einer Anfangsgeschwindigkeit c fortgeworfen, deren Richtung mit der x-Achse den Winkel γ bildet. Es wirken auf ihn im Sinne der positiven x und y zwei Kräfte, welche diesen Coordinaten bezüglich proportional sind und von denen die erste für $x = 1$ die Intensität A^2, die zweite für $y = 1$ die Intensität B^2 besitzt. Man soll berechnen:

I. welche Geschwindigkeiten v_x, v_y und v der Punkt an der Stelle xy seiner Bahn hat;

II. wo er sich zur Zeit t befindet;

III. wie gross v_x, v_y und v zu diesem Augenblicke sind;

IV. in was für einer Bahn die Bewegung erfolgt;

V. welcher Art diese Bahn für $B = A$ ist und welche Geschwindigkeit v in diesem besonderen Falle zur Zeit t herrscht.

Lösung. An der Stelle xy besitzt der Punkt die Geschwindigkeiten

$$v_x = \sqrt{c^2\cos^2\gamma + A^2x^2},$$
$$v_y = \sqrt{c^2\sin^2\gamma + B^2y^2},$$
$$v = \sqrt{c^2 + A^2x^2 + B^2y^2}.$$

Zur Zeit t befindet er sich an dem durch die Coordinaten

$$x = \frac{c \cos \gamma}{2A}(e^{At} - e^{-At}),$$
$$y = \frac{c \sin \gamma}{2B}(e^{Bt} - e^{-Bt})$$

bestimmten Orte. Ferner hat er in diesem Momente die Geschwindigkeiten

$$v_x = \tfrac{1}{2} c \cos \gamma \, (e^{At} + e^{-At}),$$
$$v_y = \tfrac{1}{2} c \sin \gamma \, (e^{Bt} + e^{-Bt}),$$
$$v = \tfrac{1}{2} c \sqrt{(e^{At} + e^{-At})^2 \cos^2 \gamma + (e^{Bt} + e^{-Bt})^2 \sin^2 \gamma}.$$

Die Bahn ist eine Curve von der Gleichung

$$y = \frac{c \sin \gamma}{2B} \left\{ \left(\frac{Ax + \sqrt{A^2 x^2 + c^2 \cos^2 \gamma}}{c \cos \gamma} \right)^{\frac{B}{A}} - \left(\frac{c \cos \gamma}{Ax + \sqrt{A^2 x^2 + c^2 \cos^2 \gamma}} \right)^{\frac{B}{A}} \right\}.$$

Wird $B = A$, so erfolgt die Bewegung in der Geraden

$$y = x \tan \gamma$$

(nämlich in derjenigen Richtung, in welcher anfänglich geworfen wurde) und zwar mit der Geschwindigkeit

$$v = \tfrac{1}{2} c \, (e^{At} + e^{-At}).$$

Aufgabe 79. In der Ecke A eines gleichschenkligen Dreiecks ABC, welches die Basislänge $AC = 2b$ und die Schenkellänge $b\sqrt{2}$ hat, befindet sich zur Zeit 0 ein Punkt P in Ruhe. Die Ecken des Dreiecks ziehen ihn dem jedesmaligen Abstande proportional derartig an, dass für die Einheit der Entfernung die Stärke jeder dieser drei Anziehungen gleich k^2 ist.

Welche Geschwindigkeiten v_x, v_y und v hat der Punkt an den verschiedenen Orten, die er durchläuft? Wo befindet er sich zur Zeit t? Welcher Art ist seine Bahn und die Bewegung in derselben?

L ö s u n g. Wir benutzen ein Coordinatensystem, dessen x-Achse AC und dessen y-Achse eine von B auf AC herabgelassene Senkrechte ist. Dann wirken auf den beweglichen Punkt, wenn er sich nach Verfluss der Zeit t an der Stelle xy befindet, die beschleunigenden Kräfte

$$X = -3k^2 x$$

und

$$Y = -k^2 (3y - b).$$

Die Geschwindigkeiten, welche er daselbst hat, sind

$$v_x = \pm k\sqrt{3}\sqrt{b^2 - x^2},$$
$$v_y = \pm k\sqrt{y(2b - 3y)},$$
$$v = \pm k\sqrt{2by + 3(b^2 - x^2 - y^2)}.$$

Der Stelle, die er zur Zeit t einnimmt, kommen die Coordinaten

$$x = b \cos k\sqrt{3}\,t,$$
$$y = \tfrac{1}{3}b(1 - \cos k\sqrt{3}\,t) = \tfrac{2}{3}b \sin^2 \tfrac{1}{2}k\sqrt{3}\,t$$

zu.

Die Bahn hat die Gleichung

$$y = \tfrac{1}{3}(b - x).$$

Sie ist also eine durch A gehende Gerade, welche auf der y-Achse die Strecke $\frac{1}{3}b$ abschneidet; sie fällt daher zusammen mit der einen Mittellinie des Dreiecks oder, was gleichbedeutend ist, sie geht durch den Schwerpunkt des letzteren.

Dass die Bewegung auf dieser Geraden eine periodische sein muss, leuchtet ohne Rechnung ein, wird aber auch durch die gefundenen Gleichungen bestätigt. Dieselben lehren nämlich Folgendes:

Der grösste Werth der Abscisse x ist $+b$. Er tritt ein zu den Zeiten $0, \frac{2\pi}{k\sqrt{3}}, \frac{4\pi}{k\sqrt{3}}, \ldots$, um welche y zu Null wird.

Der kleinste Werth von x, und zwar $-b$, liegt zu den Zeiten $\frac{\pi}{k\sqrt{3}}, \frac{3\pi}{k\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{k\sqrt{3}}, \ldots$ vor, um welche y bis zu $\frac{2}{3}b$ anwächst.

Die Geschwindigkeit v_x wird zu 0, wenn $x = b$ oder auch $= -b$ ist, erreicht hingegen ihren grössten, bezüglich kleinsten Werth, nämlich $\pm k\sqrt{3}\,b$, wenn $x = 0$ ist, also im Schwerpunkte des Dreiecks. Für $x > +b$ und $x < -b$ ergeben sich imaginäre v_x.

Für $y = 0$, oder auch für $y = \frac{2}{3}b$, giebt es senkrecht zur Dreiecksbasis gar keine Geschwindigkeit (v_y); für $y = \frac{1}{3}b$ (im Schwerpunkte) hingegen die grösste, bezüglich kleinste, und zwar $\pm \frac{1}{3}kb\sqrt{3}$. Daselbst herrscht auch in der Bahn das Maximum (Minimum) der Geschwindigkeit, nämlich $\pm \frac{1}{3}kb\sqrt{30}$.

Aufgabe 80. Um eine unbewegliche kugelförmige Masse m, die man sich (nach der Lösung der 138ten Aufgabe des Iten Theiles) im Centrum O concentrirt denken darf, bewegt sich ein Körper, der als ein mit der Masse 1 versehener Punkt gelten soll. Er hat seinen Lauf

an einer Stelle A begonnen, welche von O um a absteht. Seine Anfangsgeschwindigkeit war gleich c und ihre Richtung schloss mit OA den Winkel α ein. Die Bewegung erfolgt unter alleiniger Wirkung der Anziehung des Centralkörpers, welche der Masse m und der jedesmaligen Entfernung r proportional ist.

Berechnet soll werden

I. welche Geschwindigkeiten (v_x, v_y und v) der sich bewegende Körper an den verschiedenen Stellen seiner Bahn und zu verschiedenen Zeiten hat;

II. wo er sich zur Zeit t befindet (wenn dieselbe vom Beginne der Bewegung an gezählt wird);

III. in was für einer Bahn er läuft und wie sie liegt;

IV. welches die ganze Umlaufszeit T ist;

V. wie α und c beschaffen sein müssen, wenn die Bahn zu einem Kreise werden soll, und mit welcher Geschwindigkeit der Körper dann in demselben sich bewegt.

Lösung. Nimmt man die durch OA und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmte Ebene als die rechtwinkliger Coordinaten, OA als x-Achse und 0 als Anfangspunkt der Abscissen, so sind die beschleunigenden Kräfte

$$X = -k^2 x,$$
$$Y = -k^2 y,$$

wobei $k^2 = \varkappa m$ selbstverständliche Bedeutung hat.

Aus den beiden Differentialgleichungen der Bewegung folgt zunächst

$$v_x = \pm\sqrt{(a^2k^2 + c^2\cos^2\alpha) - k^2x^2}$$

und

$$v_y = \pm\sqrt{c^2\sin^2\alpha - k^2y^2};$$

daher ist

$$v = \sqrt{(a^2k^2 + c^2) - k^2(x^2 + y^2)},$$

womit die Geschwindigkeiten bestimmt sind, welche der Körper an den verschiedenen Stellen seiner Bahn hat.

Die Coordinaten des Ortes, den er zur Zeit t einnimmt, folgen hieraus zu

$$x = \frac{c\cos\alpha}{k}\sin kt + a\cos kt,$$

$$y = \frac{c\sin\alpha}{k}\sin kt.$$

Daher sind die Geschwindigkeiten, welche er um diese Zeit besitzt

$$v_x = c\cos\alpha \cos kt - ak \sin kt,$$
$$v_y = c \sin\alpha \cos kt,$$
$$v = \sqrt{c^2 \cos^2 kt - 2ack \cos\alpha \sin kt \cos kt + a^2 k^2 \sin^2 kt}.$$

Als Bahngleichung findet man

$$(c^2 \sin^2\alpha) x^2 + (c^2 \cos^2\alpha + a^2 k^2) y^2 - (c^2 \sin 2\alpha) xy - a^2 c^2 \sin^2\alpha = 0.$$

Der Körper bewegt sich also in einer Kegelschnittslinie und zwar, wie sich bei näherer Untersuchung ihrer Gleichung ergiebt, in einer Ellipse, deren Mittelpunkt nach dem anziehenden Centrum O fällt und deren grosse Achse mit OA einen Winkel β einschliesst, welcher durch

$$\tan 2\beta = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{c^2 \cos 2\alpha + a^2 k^2}$$

bestimmt ist.

Zu einem vollen Umlaufe wird die Zeit

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

gebraucht.

Soll die elliptische Bewegung in eine kreisförmige übergehen, so muss $\alpha = 90^0$ sein und $c = ak$. Die Bahngeschwindigkeit v ist dann in diesem Kreise unveränderlich, nämlich gleich ak.

Aufgabe 81. Die Anziehung, welche der Centralkörper ausübt, ist der n^{ten} Potenz der Entfernung r proportional und für die Einheit derselben gleich k. Im Uebrigen sind die Verhältnisse wie bei der vorigen Aufgabe. Man soll ermitteln, mit welcher Geschwindigkeit der sich bewegende Körper in seiner Bahn läuft, also wie v von r abhängt.

Lösung. Die beiden Differentialgleichungen der Bewegung lauten hier

$$\frac{dv_x}{dt} = -kxr^{n-1},$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -kyr^{n-1},$$

wobei das Coordinatensystem in der bei der vorhergehenden Lösung angegebenen Lage benutzt worden ist.

Aus denselben folgt, mit Beachtung der Beziehungen

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

und der hierin enthaltenen

$$v\frac{dv}{dt}=v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt},$$

$$r\,dr=x\,dx+y\,dy,$$

für $n \gtrless -1$:

$$v^2=c^2+\frac{2k}{n+1}(a^{n+1}-r^{n+1}),$$

für $n=-1$ hingegen:

$$v^2=c^2+2kl\frac{a}{r}.$$

Die vorletzte dieser Gleichungen giebt für $n=1$ die in der Lösung der Aufgabe 80 bestimmte Geschwindigkeit.

Aufgabe 82. Ein Körper (Punkt; Masse 1) wird nach dem festen Centrum O durch eine Kraft R gezogen, deren Intensität

$$R=\frac{K}{r^2}+\frac{K^2}{2r^3}$$

ist, in welchem Ausdrucke K eine gegebene Constante bedeutet und r den Abstand von O. Die Bewegung beginnt zur Zeit 0 an einer Stelle A, welche um a vom Centrum entfernt ist, mit einer Anfangsgeschwindigkeit

$$c=\frac{K}{a\sqrt{2}},$$

deren Richtung auf OA senkrecht steht. Zu berechnen sind

I. die Bahngeschwindigkeit v, welche der Punkt im Abstande r von O besitzt;

II. die Polargleichung und die Form seiner Bahn;

III. die Zeit t, welche er braucht, um bis in die Entfernung r von O zu gelangen.

Lösung. Wir nehmen O als Pol und OA als Achse eines Polarcoordinatensystems; zugleich auch diese Gerade als Abscissenlinie und jenen Punkt als Anfang dazu rechtwinkliger Ordinaten; beide Systeme aber in der durch OA und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene.

Als Differentialgleichungen der Bewegung ergeben sich

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}=-\left(\frac{K}{r^2}+\frac{K^2}{2r^3}\right)\frac{x}{r}$$

und

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv_y}{dt}=-\left(\frac{K}{r^2}+\frac{K^2}{2r^3}\right)\frac{y}{r}.$$

Durch zweckmässiges Umgestalten und Combiniren lassen sich au denselben integrirbare Formen herleiten.

Zunächst folgt aus den beiden Gleichungen

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

also

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = A$$

oder, wenn man die Integrationsconstante A bestimmt,

$$x\,dy - y\,dx = \frac{K}{\sqrt{2}}\,dt.$$

Bei Benutzung von Polarcoordinaten geht diess über in

$$r^2\,d\theta = \frac{K}{\sqrt{2}}\,dt$$

und liefert

$$S = \frac{K}{2\sqrt{2}}\,t,$$

wobei S die Fläche des vom Radiusvector r beschriebenen Sectors, g rechnet von der Zeit 0 an.

Dieser Flächeninhalt ist also der verflossenen Zeit proportional.

Eine andere naheliegende Combination der beiden Differenti gleichungen der Bewegung gründet sich darauf, dass

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

also

$$v \frac{dv}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt}$$

ist. Sie giebt

$$-v\,dv = \frac{1}{r}\left(\frac{K}{r^2} + \frac{K^2}{2r^3}\right)(x\,dx + y\,dy).$$

Hieraus folgt, wenn man

$$r^2 = x^2 + y^2$$

beachtet,

$$v^2 = 2\frac{K}{r} + \frac{K^2}{2r^2} + 2B$$

und nach Bestimmung der Integrationsconstante B

$$v^2 = 2K\left(\frac{K}{4r^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

als Quadrat der im Abstande r herrschenden Geschwindigkeit.

Die Polargleichung der Bahn lässt sich hieraus und aus dem vorstehenden

$$r^2\, d\theta = \frac{K}{\sqrt{2}}\, dt$$

herleiten, wenn das bekannte

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{(dr)^2 + (r\, d\theta)^2}{dt^2}$$

gehörig beachtet wird. Es entsteht zunächst

$$\frac{K^2}{2} \cdot \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2} = 2K\left(\frac{K}{4r^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Diess giebt sodann

$$\theta = \frac{\sqrt{K}}{2} \int \frac{dr}{r\sqrt{r - \frac{r^2}{a}}}$$

und schliesslich

$$r = \frac{aK}{K + a\theta^2}.$$

Hieraus sieht man, dass sich die Bahn spiralförmig um O herumwindet, diesem Centrum immer näher kommt, es aber nie erreicht.

Für die Zeit t, welche der Körper braucht, um sich dem anziehenden Mittelpunkte bis auf die Entfernung r zu nähern, ergiebt sich mit Benutzung vorhergehender Gleichungen zunächst

$$t = \frac{1}{\sqrt{2K}} \int \frac{\sqrt{r}\, dr}{\sqrt{1 - \frac{r}{a}}}$$

und hieraus

$$t = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{2K}}\,(u + \sin u),$$

wobei

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} u = \frac{r}{a};$$

also, wenn man diesen Werth lieber einsetzt,

$$t = \sqrt{\frac{a}{2K}}\left[\sqrt{r(a-r)} + a \arccos \sqrt{\frac{r}{a}}\right].$$

Aufgabe 83. Die Anziehung, welche das feste Centrum O ausübt, ist irgend eine Function der Entfernung $[R = f(r)]$; die Anfangsgeschwindigkeit hat den allgemeinen Werth c und es bildet

ihre Richtung mit OA den Winkel α. Alles Uebrige ist wie bei der Aufgabe 82. Auch werden die Coordinatensysteme so angenommen, wie in der vorhergehenden Lösung angegeben worden ist. Man soll, auf demselben Wege wie dort, ermitteln

I. das für die von den Leitstrahlen beschriebenen Flächen geltende Gesetz;

II. die Beziehung zwischen der Anziehung R und der Geschwindigkeit v;

III. die allgemeine Form der Bahngleichung;

IV. unter der Voraussetzung des Bekanntseins der letzteren, den Ausdruck für die beschleunigende Kraft R;

V. die Beziehung zwischen der Zeit t und dem Radiusvector r;

VI. die zwischen t und der Anomalie θ.

Lösung. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten hier

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d v_x}{dt} = -x \frac{f(r)}{r}$$

und

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d v_y}{dt} = -y \frac{f(r)}{r}.$$

Aus denselben folgt in der bei der vorhergehenden Lösung angegebenen Weise zunächst

$$x\,dy - y\,dx = A\,dt.$$

Diess giebt, wenn Polarcoordinaten eingeführt werden,

1) $$r^2\,d\theta = A\,dt,$$

also, unter Beibehaltung der dort benutzten Bezeichnung,

2) $$S = \tfrac{1}{2} A t.$$

Die von den Radienvectoren beschriebenen Flächen sind also bei jeder Centralbewegung den verflossenen Zeiten proportional.

Ferner ergiebt sich

3) $$v^2 = 2\left(B - \int R\,dr\right)$$

als Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der Anziehung. Die Integrationsconstanten A und B, wie auch die noch folgenden, können ebenfalls so bestimmt werden, wie es in der Lösung der Aufgabe 82 geschehen ist.

Auf demselben Wege wie dort erhält man weiter

4) $$\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2} = 2\left[B - \int f(r)\,dr\right];$$

sodann aus 1) und 4) durch Elimination der Zeit

$$5)\qquad \frac{A^2\,(dr^2+r^2\,d\theta^2)}{r^4\,d\theta^2}=2\left[B-\int f(r)\,dr\right]$$

und hieraus

$$6)\qquad A\int\frac{dr}{r\sqrt{2r^2\left[B-\int f(r)\,dr\right]-A^2}}+C=\theta$$

als allgemeine Form der Polargleichung der Bahn.

Die Gleichung 5) liefert sodann

$$\frac{A^2}{2}\left\{\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right\}=B-\int f(r)\,dr,$$

also

$$\int f(r)\,dr=B-\frac{A^2}{2}\left\{\frac{1}{r^2}+\frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^4}\right\}$$

oder

$$\int f(r)\,dr=B-\frac{A^2}{2}\left\{\frac{1}{r^2}+\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right]^2\right\}$$

und für die beschleunigende Kraft $R=f(r)$

$$7)\qquad R=\frac{A^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r}+\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right\},$$

welchem Resultate die hübsche symmetrische Form

$$R=\frac{A^2}{r^2}\left\{\left(\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r}\right)''\right\}$$

ertheilt werden kann.

Als Beziehung zwischen der Zeit t und dem Leitstrahle r findet man, indem man aus 1) und 4) die Anomalie θ eliminirt,

$$8)\qquad \int\frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2\left[B-\int f(r)\,dr\right]-A^2}}=t+D.$$

Wenn die betreffenden Reductionen ausführbar sind, so giebt die Gleichung 6)

$$r=\varphi\,(\theta),$$

und 8) liefert

$$r=\psi\,(t);$$

hieraus folgt

$$\theta=\chi\,(t)$$

als Beziehung zwischen Zeit und Anomalie.

Auf dem Wege der Construction kann man übrigens θ auch dadurch bestimmen, dass man zunächst [nach 6)] die Bahn zeichnet und dann mit r, welches nach 8) berechnet wurde, von O aus einen Kreis beschreibt.

Aufgabe 84. Es sollen die in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe entwickelten Gleichungen 3) und 6) angewendet werden zur Bestimmung der Geschwindigkeit und der Bahngleichung für die in Nr. 82 behandelte Centralbewegung.

Lösung. Ohne Schwierigkeiten gelangt man zu den unter 82 angegebenen Resultaten.

b) Bewegungen mit Widerstand.

Aufgabe 85. Ein schwerer Körper, welcher so beschaffen ist, dass er als Punkt von der Masse 1 angesehen werden darf, wird unter dem Erhebungswinkel γ mit der Anfangsgeschwindigkeit c in die Höhe geworfen. Das Mittel widersteht proportional der Geschwindigkeit v und derartig, dass der Widerstand für $v = 1$ die Intensität k hat. Man soll, unter Benutzung eines Coordinatensystems, dessen x-Achse horizontal liegt, dessen y-Achse senkrecht nach oben gerichtet ist und dessen Ursprung O mit dem Anfangspunkte der Bewegung zusammenfällt, berechnen:

I. die Geschwindigkeiten v_x, v_y und v, welche der Körper zu der vom Beginne der Bewegung an gezählten Zeit t besitzt;
II. die Coordinaten x und y derjenigen Stelle, an welcher er sich zu dieser Zeit befindet;
III. die Grenzen, denen sich v_x, v_y, v, x und y bei in's Unendliche wachsendem t nähern;
IV. die Gleichung der Bahn;
V. diejenige Zeit t_1, welche der Körper braucht, um bis an die höchste Stelle seines Laufes zu gelangen;
VI. die Coordinaten p und q dieser Stelle;
VII. die Wurfweite w und ob dieselbe kleiner, gleich oder grösser ist, als die doppelte Abscisse der höchsten Stelle der Bahn.

Lösung. Aus nahe liegenden Gründen sind hier

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$$

und

$$\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - g$$

die Differentialgleichungen der Bewegung.

Sie liefern

$$v_x = a e^{-kt},$$

$$v_y = \frac{1}{k} [(g + bk) e^{-kt} - g],$$

in welchen Ausdrücken

$$a = c \cos \gamma,$$

$$b = c \sin \gamma$$

als Abkürzungen benutzt sind.

Die Geschwindigkeit in der Bahn ist

$$v = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^2 e^{-2kt} + [(g + bk) e^{-kt} - g]^2}.$$

Ferner sind

$$x = \frac{a}{k} (1 - e^{-kt}),$$

$$y = \frac{g + bk}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$

zur Zeit t die Coordinaten des Ortes des Körpers.

Die Geschwindigkeit v_x nimmt also immer, und zwar nach einer geometrischen Progression, ab; sie nähert sich für in's Unendliche wachsende t dem Werthe Null.

Hingegen ist v_y anfänglich positiv, wird dann zu Null, nachher negativ und geht für $t = \infty$ in $-\frac{g}{k}$ über.

Ebenso nähert sich v der Grenze $\frac{g}{k}$; die Bewegung wird also nach und nach gleichförmig.

Die Abscisse x geht bei unendlichem t in $\frac{a}{k}$ über; die Ordinate y wird negativ unendlich. Die Bahn hat mithin an der Stelle $x = \frac{a}{k}$ eine verticale Asymptote.

Als Gleichung der von dem Körper beschriebenen Curve findet man

$$y = \frac{1}{k} \left(\frac{g + bk}{a} x - \frac{g}{k} l \frac{a}{a - kx} \right).$$

Die Zeit, welche er braucht, um bis an die höchste Stelle zu kommen, ist

$$t_1 = \frac{1}{k} l \frac{g + bk}{g}.$$

Die Coordinaten dieses Culminationspunktes sind

$$p = \frac{ab}{g + bk},$$

$$q = \frac{1}{k^2}\left(bk - g\, l\, \frac{g + bk}{g}\right).$$

Das q ist die Wurfhöhe; die Wurfweite w ist durch die transcendente Gleichung

$$0 = \frac{g + bk}{a}\, w - \frac{g}{k}\, l\, \frac{a}{a - kw}$$

bestimmt. Für

$$x = 2p = \frac{2ab}{g + bk}$$

geht die Bahngleichung, wenn man statt y lieber η schreibt, über in

$$\eta = \frac{1}{k}\left(2b - \frac{g}{k}\, l\, \frac{g + bk}{g - bk}\right).$$

Ist nun $bk > g$, so ist η imaginär, d. h. der Punkt, dessen Abscisse $2p$ ist, liegt gar nicht auf der Bahncurve. Ist $bk = g$, so wird $\eta = -\infty$, d. h. der Punkt $2p$ fällt mit demjenigen zusammen, durch welchen die verticale Asymptote geht. Ist endlich $bk < g$, so liefert die letzte Gleichung ein endliches reelles η, von welchem also noch entschieden werden muss, ob es positiv oder negativ ist. Schreibt man es in der Form

$$\eta = \frac{2g}{k^2}\left(\frac{bk}{g} - \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1 + \frac{bk}{g}}{1 - \frac{bk}{g}}\right),$$

so kann man, weil $\frac{bk}{g} < 1$ ist, dafür setzen

$$\eta = \frac{2g}{k^2}\left[-\tfrac{1}{3}\left(\frac{bk}{g}\right)^3 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{bk}{g}\right)^5 - \dots\right];$$

es ist daher

$$\eta < 0,$$

d. h. der Punkt, dessen Abscisse $2p$ ist, liegt unterhalb des Horizontes.

Die Wurfweite w ist mithin jedenfalls kleiner als die doppelte Abscisse des höchsten Punktes der Bahn.

Aufgabe 86. Wie Aufg. 85, doch ist der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional. Aus den für die Bewegung in horizontaler und verticaler Richtung geltenden Differentialgleichungen, welche nicht unmittelbar integrirbar sind, soll Folgendes hergeleitet werden:

I. die Geschwindigkeit v_x als Function der Bahnlänge s, letztere von O aus gezählt;

II. eine Gleichung zwischen der goniometrischen Tangente des Tangentenwinkels τ der Bahn und ihrer Länge, also zwischen $tan\,\tau = y'$ und s;

III. die Coordinaten x und y des Ortes des geworfenen Körpers als Functionen von $tan\,\tau$;

IV. die Zeit t, vom Beginne der Bewegung an gezählt, als Function von y';

V. desgleichen die Geschwindigkeit v.

Lösung. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten hier

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\,kv^2\cos\tau = -\,kv^2\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -\,g - kv^2\frac{dy}{ds}.$$

Aus der Ersten derselben folgt

$$dv_x = -\,kv_x\,ds,$$

daher

$$v_x = c\cos\gamma\, e^{-ks}.$$

Die Zweite kann in der Form

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\,g - kv_y\frac{ds}{dt}$$

geschrieben werden. Da nun andererseits, wie man bald findet,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y'\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{dy'}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy'}{dt} - kv_y\frac{ds}{dt}$$

ist, so entsteht

$$v_x\frac{dy'}{dt} = -\,g.$$

Aus dieser Gleichung und aus der obigen für v_x folgt

$$\frac{dy'}{dx} = -\,\frac{g}{c^2\cos^2\gamma}\,e^{2ks},$$

also, wegen $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$,

$$\sqrt{1+y'^2}\,dy' = -\frac{g}{c^2\cos^2\gamma}e^{2ks}ds;$$

mithin durch Integration

$$y'\sqrt{1+y'^2}+l(y'+\sqrt{1+y'^2}) = -\frac{g}{kc^2\cos^2\gamma}e^{2ks}+C,$$

wobei die Constante

$$C=\frac{g\sec^2\gamma}{kc^2}+\tan\gamma\sec\gamma+l(\tan\gamma+\sec\gamma).$$

Hiermit ist der zweite Theil der Aufgabe gelöst.

Die vorstehenden Gleichungen liefern nun

$$x=\frac{1}{k}\int\frac{dy'}{y'\sqrt{1+y'^2}+l(y'+\sqrt{1+y'^2})-C}$$

und

$$y=\frac{1}{k}\int\frac{y'\,dy'}{y'\sqrt{1+y'^2}+l(y'+\sqrt{1+y'^2})-C}$$

als Coordinaten des Ortes. Hierbei gehen die Integrationen von $\tan\gamma$ bis y'. Da sie jedenfalls, wenn auch nur näherungsweise, ausführbar sind, so erhält man x und y als Functionen von y', d. h. die Coordinaten der Bahnpunkte für jede beliebige Neigung der Tangente. Die Bahn ist mithin construirbar.

Für $y'=0$ ergiebt sich die Lage ihres Scheitels; für $y=0$ die Wurfweite.

Man findet ferner, dass der Erstere nicht senkrecht über der Mitte der Letzteren liegt, sondern weiter, dass der von ihm aus abwärts gehende Theil der Bahn sich schneller senkt als der andere ansteigt und dass er eine verticale Asymptote besitzt.

Für die Zeit, welche der Körper braucht, um bis an eine durch die Lage der Bahntangente gegebene Stelle zu kommen, erhält man unter Benutzung des Vorhergehenden

$$t=\frac{1}{\sqrt{gk}}\int\frac{dy'}{\sqrt{C-y'\sqrt{1+y'^2}-l(y'+\sqrt{1+y'^2})}},$$

wobei die Integration sich ebenfalls von $\tan\gamma$ bis y' erstreckt.

Endlich ergiebt sich

$$v^2=\frac{g}{k}\,\frac{1+y'^2}{C-y'\sqrt{1+y'^2}-l(y'+\sqrt{1+y'^2})}.$$

Diess nähert sich für in's Unendliche wachsende y' der Grenze $\frac{g}{k}$, die Bewegung geht also in eine gleichförmige über; der Wider-

stand kv^2 wird gleich g, also gleich dem Gewichte des geworfenen Körpers.

Anmerkung. Von den beiden Differentialgleichungen der Bewegung, welche als Ausgangspunkte der Lösung gedient haben, war die erste zwar leicht, die zweite aber schwer integrirbar. Diess lässt sich vermeiden, wenn man die zweite Componente der beschleunigenden Kraft nicht in der Richtung der Schwere, sondern in der des Krümmungshalbmessers ϱ der Bahn nimmt. Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv^2 \frac{dx}{ds}$$

wie vorhin, hingegen, vom Früheren abweichend,

$$\frac{v^2}{\varrho} = g \cos \tau .$$

Wegen $\varrho = -\frac{ds}{d\tau}$ ist diess

$$v^2 \frac{d\tau}{ds} = -g \cos \tau .$$

Da nun die erste dieser Gleichungen nach dem Obigen

$$v_x = c \cos \gamma \, e^{-ks}$$

liefert, also

$$v = c \cos \gamma \frac{e^{-ks}}{\cos \tau},$$

so entsteht

$$\frac{c^2 \cos^2 \gamma}{g} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau} = -e^{2ks} ds,$$

das ist die vorhin auch erhaltene Gleichung

$$\sqrt{1+y'^2}\, dy' = -\frac{g}{c^2 \cos^2 \gamma} e^{2ks} ds .$$

Nun folgt das früher hieraus Abgeleitete.

Aufgabe 87. Der Wurf erfolgt unter denselben Umständen wie in der vorigen Aufgabe, jedoch bei so geringem Erhebungswinkel γ, dass in dem oberhalb des Horizontes gelegenen Bahntheile $\tan^2 \tau$ vernachlässigt, also näherungsweise $ds = dx$ und $s = x$ genommen werden darf.

Man soll, mit Benutzung der in der vorhergehenden Lösung enthaltenen Resultate, bestimmen: die Gleichung der Bahn, die Wurfweite w, die Wurfhöhe h, die Wurfzeit t überhaupt und die zur Er-

reichung des Scheitels nöthige t_1 insbesondere, die Geschwindigkeit mit welcher der geworfene Körper fliegt und diejenige v_1, mit der die höchste Bahnstelle durchläuft.

Lösung. Als Differentialgleichung der Bahn erhält man

$$dy' = -\frac{g}{c^2 \cos^2\gamma} e^{2kx}\, dx;$$

hieraus folgt durch Integration

$$y = \frac{1}{(2ck\cos\gamma)^2} \{ 2k(g + c^2 k \sin 2\gamma) x + g(1 - e^{2kx}) \}.$$

Die Wurfweite ist durch die transcendente Gleichung

$$2k(g + c^2 k \sin 2\gamma) w = g(e^{2kw} - 1)$$

bestimmt.

Für die Wurfhöhe ergiebt sich

$$h = \frac{1}{(2ck\cos\gamma)^2} \left\{ (g + c^2 k \sin 2\gamma)\, l \frac{g + c^2 k \sin 2\gamma}{g} - c^2 k \sin 2\gamma \right\}.$$

Zur Erreichung der Bahnstelle xy braucht der geworfene Körp die Zeit

$$t = \frac{1}{ck\cos\gamma}(e^{kx} - 1)$$

und im Scheitel langt er in dem Augenblicke

$$t_1 = \frac{1}{ck\cos\gamma} \left\{ \sqrt{\frac{g + c^2 k \sin 2\gamma}{g}} - 1 \right\}$$

an.

Seine Geschwindigkeit ist im Allgemeinen

$$v = c\cos\gamma\, e^{-kx}$$

und an der höchsten Stelle der Bahn

$$v_1 = c\cos\gamma \sqrt{\frac{g}{g + c^2 k \sin 2\gamma}}.$$

Aufgabe 88. Auf einen materiellen Punkt, welcher sich zur Ze Null im Coordinatenanfange O eines rechtwinkligen Systems in Rul befindet, wirken zwei constante Kräfte A und B in der Richtung d positiven x, bezüglich in der der positiven y. Die Bewegung erfolgt einem Mittel, welches proportional der Geschwindigkeit v und derart widersteht, dass die Stärke des Widerstandes für die Einheit von gleich k ist. Man soll berechnen

I. welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v der Punkt zur Zeit t besitzt und welchen Grenzen sich dieselben nähern;

II. wo er sich zu dieser Zeit befindet;

III. in was für einer Bahn er läuft.

Lösung. Die gesuchten Geschwindigkeiten sind:

$$v_x = \frac{A}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$v_y = \frac{B}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$v = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Sie gehen bei in's Unendliche wachsender Zeit über in $\frac{A}{k}$, bezüglich $\frac{B}{k}$ und $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{k}$.

Für die Coordinaten des Ortes des sich bewegenden Punktes findet man

$$x = \frac{A}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1),$$

$$y = \frac{B}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1);$$

mithin als Gleichung der Bahn

$$y = \frac{B}{A}x.$$

Die Bewegung erfolgt also von O aus in einer Geraden, die den Winkel $\arctan \frac{B}{A}$ mit dem positiven Theile der x-Achse bildet.

Aufgabe 89. Wie die vorige Aufgabe, doch liegt eine Anfangsgeschwindigkeit c vor, deren Richtung den Winkel α mit der der positiven Abscissen bildet. Ferner soll sich A zu B verhalten wie $\cos\alpha$ zu $\sin\alpha$. Die Untersuchung der Bewegung wird in demselben Umfange wie bei Nr. 88 verlangt.

Lösung. Man kommt zu den mit dem Vorhergehenden leicht vergleichbaren Resultaten

$$v_x = \frac{A}{k}(1 - e^{-kt}) + c\cos\alpha\, e^{-kt},$$

$$v_y = \frac{B}{k}(1 - e^{-kt}) + c\sin\alpha\, e^{-kt}, \quad B = A\tan\alpha,$$

$$v=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{k}(1-e^{-kt})+c\,e^{-kt},$$

$$x=\frac{A}{k^2}(kt+e^{-kt}-1)+\frac{c\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt}),$$

$$y=\frac{B}{k^2}(kt+e^{-kt}-1)+\frac{c\sin\alpha}{k}(1-e^{-kt}),$$

$$y=x\tan\alpha.$$

Sie lehren, dass auch hier die v_x, v_y und v sich den $\frac{A}{k}$, $\frac{B}{k}$, $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{k}$ nähern und dass auch hier die Bewegung linig erfolgt, nämlich in der Richtung der Anfangsgeschwind

II. Krummlinige Bewegungen im Raume.

A. Vorgeschrieben die Art der Bahn, in welch der Punkt bewegen soll, oder die Geschwindig desselben, oder beides.

Aufgabe 90. Die Bewegung eines materiellen Punkte derartig, dass die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z seines (mer dem Quadrate der verflossenen Zeit proportional sind, für heit der letzteren aber die Längen a, b, c haben.

In was für einer Bahn läuft er? Mit welchen Achsengesc keiten und mit welcher Bahngeschwindigkeit? Wie sind die benden, im Sinne der positiven Coordinaten wirkenden Krä und Z beschaffen?

Lösung. Die Bahn ist eine durch den Ursprung des gehende **Gerade**, deren xy- und xz-Projectionen mit der x-A Winkel *arctan* $\frac{b}{a}$ und *arctan* $\frac{c}{a}$ bilden.

Die Achsengeschwindigkeiten nehmen zu wie die Zeiten die Quadratwurzeln der Coordinaten; es ist nämlich

$$v_x=2\,at=2\sqrt{ax},$$

$$v_y=2\,bt=2\sqrt{by},$$

$$v_z=2\,ct=2\sqrt{cz}.$$

In der Bahn herrscht die Geschwindigkeit

$$v=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t=2\sqrt{ax+by+cz}.$$

Die Kräfte, denen der Punkt unterliegt, sind constant und zwar

$$X = 2a, \qquad Y = 2b, \qquad Z = 2c.$$

Aufgabe 91. Die rechtwinkligen Coordinaten eines sich bewegenden Punktes hängen durch die Gleichungen

$$x = a + a_1 t + a_2 e^{-kt},$$
$$y = b + b_1 t + b_2 e^{-kt},$$
$$z = c + c_1 t + c_2 e^{-kt},$$

in denen die a, b und c bekannte constante Grössen sind, von der verflossenen Zeit t ab.

Man soll angeben, welcher Art die Kräfte X, Y, Z sind, die diese Bewegung erzeugen, und welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v der Punkt zur Zeit t besitzt.

Lösung. Zunächst findet man

$$v_x = a_1 - k a_2 e^{-kt},$$
$$v_y = b_1 - k b_2 e^{-kt},$$
$$v_z = c_1 - k c_2 e^{-kt}$$

und hat damit auch $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Wenn die Zeit in's Unendliche wächst, so nähern sich v_x, v_y und v_z den Grenzen a_1, b_1 und c_1; mithin v der Grenze $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$; die Bewegung geht also in eine gleichförmige über.

Für die beschleunigenden Kräfte ergiebt sich

$$X = k^2 a_2 e^{-kt},$$
$$Y = k^2 b_2 e^{-kt},$$
$$Z = k^2 c_2 e^{-kt},$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$X = k a_1 - k v_x,$$
$$Y = k b_1 - k v_y,$$
$$Z = k c_1 - k v_z.$$

Man ersieht hieraus, dass diese Kräfte immer abnehmen und sich der Grenze Null nähern; ferner, dass die Bewegung hervorgebracht werden kann, indem man an dem Punkte drei constante Kräfte ka_1, kb_1, kc_1, deren Richtungen senkrecht auf einander stehen, wirken lässt und zwar in einem Mittel, welches proportional der Bahngeschwindigkeit v derartig widersteht, dass für $v = 1$ der Widerstand $= k$ ist.

Aufgabe 92. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein irgend wie sich bewegender Punkt in seiner Bahn läuft, ist immer eine Function der in der letzteren zurückgelegten Strecke, also $v = f(s)$; welche Zeit t braucht er zum Durchlaufen von s und welche (t_1) speciell dann, wenn $v = (c + s)^n$ ist?

Lösung.

$$t = \int \frac{ds}{f(s)} + Const.,$$

wobei die Constante so bestimmt werden muss, dass für $s = 0$ auch $t = 0$ ist.

Ferner, für $n = 1$,

$$t_1 = l \frac{c + s}{c};$$

hingegen, für $n \gtrless 1$,

$$t_1 = \frac{(c + s)^{1-n} - c^{1-n}}{1 - n}.$$

Aufgabe 93. Im Sinne der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z rückt ein punktartiger Körper mit den Geschwindigkeiten $v_x = L\sqrt{x}$, $v_y = M\sqrt{y}$, $v_z = N\sqrt{z}$ vor, indem er seine Bewegung zur Zeit Null im Anfange des Systems beginnt.

Was für Kräfte X, Y, Z treiben ihn an? Welcher Art ist die Bahn, in der er läuft?

Lösung. Die beschleunigenden Kräfte sind constant, nämlich $\frac{1}{2} L^2$, $\frac{1}{2} M^2$ und $\frac{1}{2} N^2$.

Die Bahn ist eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade, deren xy- und xz-Projectionen die Winkel $arctan \frac{M^2}{L^2}$, bezüglich $arctan \frac{N^2}{L^2}$, mit der x-Achse einschliessen.

Aufgabe 94. Zwei der Bahnprojectionen eines Punktes haben, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, die Gleichungen

$$y = Ax,$$
$$z = Bx - C.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher er parallel zur x-Achse sich bebewegt, ist

$$v_x = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Der Lauf hat zur Zeit Null an der Stelle abc begonnen.

Man soll das Nähere über die Natur desselben ermitteln; namentlich über die zu allgemeinen Zeiten und an allgemeinen Bahnstellen herrschenden Geschwindigkeiten, über die Art der den Punkt bewegenden Kräfte und über die Orte, an denen er sich zu den verschiedenen Zeiten befindet.

Lösung. Die Bahn ist, wie die gegebenen Gleichungen lehren, eine Gerade, welche durch diejenige Stelle der z-Achse geht, die um C unter dem Coordinatenanfange liegt.

Zur Zeit t befindet sich der Punkt an dem Orte

$$x = a \cos kt,$$
$$y = A a \cos kt,$$
$$z = B a \cos kt - C$$

und bewegt sich mit den Geschwindigkeiten

$$v_x = - ak \sin kt,$$
$$v_y = - A a k \sin kt,$$
$$v_z = - B a k \sin kt,$$
$$v = ak \sqrt{1 + A^2 + B^2} \sin kt,$$

in deren Werthen $\sin kt$ durch

$$\pm \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \pm \frac{1}{Aa}\sqrt{(Aa)^2 - y^2} \quad \text{oder} \quad \pm \frac{1}{Ba}\sqrt{(Ba)^2 - (z + C)^2}$$

ersetzt werden kann.

Man erkennt, dass die Bewegung eine periodische ist, bei welcher die Zeit $\frac{2\pi}{k}$ zu einer ganzen Schwingung gebraucht wird.

Die beschleunigenden Kräfte sind

$$X = - ak^2 \cos kt = - k^2 x,$$
$$Y = - A a k^2 \cos kt = - k^2 y,$$
$$Z = - B a k^2 \cos kt = - k^2 (z + C).$$

Es können also die vorliegenden Bewegungserscheinungen z. B. dadurch erzeugt werden, dass der Punkt nach dem Coordinatenanfange hin einer Anziehung unterliegt, die dem Abstande r proportional ist, für $r = 1$ aber die Stärke k^2 besitzt und dass auf ihn ausserdem noch eine im Sinne der negativen z gerichtete Kraft C (etwa seine eigene Schwere) wirkt.

Aufgabe 95. Ein materieller Punkt bewegt sich derartig, dass die Horizontalprojection seiner auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Bahn die Gleichung

$$y = \frac{b}{a} x$$

besitzt. In der Richtung der y-Achse hat er die Geschwindigkeit

$$v_y = \tfrac{1}{2} bk \sin 2kt;$$

in der Richtung seiner Bahn

$$v = \tfrac{1}{2} k \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sin 2kt.$$

Zur Zeit Null befand er sich im Coordinatenanfange O in Ruhe.

Man soll seine Bewegung untersuchen, nämlich ermitteln, welche Achsengeschwindigkeiten v_x und v_z er zur Zeit t besitzt, wo er sich zu dieser Zeit befindet, in was für einer Bahn er läuft, ob und wie seine Bewegung periodisch ist, welcher Art die beschleunigenden Kräfte sind, die sie erzeugen und ob dieselbe vielleicht dadurch hervorgebracht werden kann, dass der Punkt proportional der Entfernung angezogen wird durch den Coordinatenanfang O und durch drei Punkte A, B, C, von denen A auf der x-Achse um a, B auf der y-Achse um b, C auf der z-Achse um c von O entfernt liegt.

Lösung. Dis Achsengeschwindigkeiten v_x und v_z sind

$$v_x = \tfrac{1}{2} ak \sin 2kt,$$
$$v_z = \tfrac{1}{2} ck \sin 2kt;$$

die Coordinaten des Ortes

$$x = \tfrac{1}{4} a (1 - \cos 2kt) = \tfrac{1}{2} a \sin^2 kt,$$
$$y = \tfrac{1}{4} b (1 - \cos 2kt) = \tfrac{1}{2} b \sin^2 kt,$$
$$z = \tfrac{1}{4} c (1 - \cos 2kt) = \tfrac{1}{2} c \sin^2 kt.$$

Die Bahn ist eine von O nach der Stelle abc gerichtete Gerade, denn die Gleichungen ihrer Projectionen lauten

$$y = \frac{b}{a} x, \quad z = \frac{c}{a} x, \quad z = \frac{c}{b} y.$$

Die Bewegung ist eine periodische.

Für $t = 0,\ \frac{\pi}{k},\ 2\frac{\pi}{k},\ 3\frac{\pi}{k}, \ldots$ ist $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$;

für $t = \tfrac{1}{2}\frac{\pi}{k},\ \tfrac{3}{2}\frac{\pi}{k},\ \tfrac{5}{2}\frac{\pi}{k}, \ldots$ ist $x = \tfrac{1}{2} a,\ y = \tfrac{1}{2} b,\ z = \tfrac{1}{2} c$,

und es sind diess die kleinsten, bezüglich die grössten Werthe, welche die Coordinaten erreichen können.

Zu einer ganzen Schwingung wird die Zeit $T = \frac{\pi}{k}$ gebraucht.

Ferner sieht man, dass v_x, v_y und v_z gleich 0 sind, für $t = 0$, $\frac{\pi}{k}$, $2\frac{\pi}{k}$, $3\frac{\pi}{k}$, ...; jedoch auch für $t = \frac{1}{2}\frac{\pi}{k}$, $\frac{3}{2}\frac{\pi}{k}$, $\frac{5}{2}\frac{\pi}{k}$, ...

Die grössten und kleinsten Werthe von v_x, v_y, v_z und v, nämlich $\pm\frac{1}{2}ak$, $\pm\frac{1}{2}bk$, $\pm\frac{1}{2}ck$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}k$, treten für $x=\frac{1}{4}a$, $y=\frac{1}{4}b$, $z=\frac{1}{4}c$ ein, das ist zu den Zeiten $t=\frac{1}{4}\frac{\pi}{k}$, $\frac{3}{4}\frac{\pi}{k}$, $\frac{5}{4}\frac{\pi}{k}$, ...

Für die beschleunigenden Kräfte findet man

$$X = ak^2 \cos 2kt = k^2(a - 4x),$$
$$Y = bk^2 \cos 2kt = k^2(b - 4y),$$
$$Z = ck^2 \cos 2kt = k^2(c - 4z).$$

Da die von den vier Punkten O, A, B und C ausgeübten Anziehungen auch diese X, Y und Z liefern, wenn für die Einheit der Entfernung die Intensität der Attraction gleich k^2 ist, so kann die vorliegende Bewegung durch sie erzeugt werden.

B. Vorgeschrieben die Kräfte, welche die Bewegung erzeugen.

Aufgabe 96. Gewisse einen Punkt beeinflussende Kräfte setzen sich zu den im Sinne der positiven Coordinaten wirkenden constanten $X = A^2$, $Y = B^2$ und $Z = C^2$ zusammen. Die Bewegung beginnt zur Zeit Null vom Ursprunge des rechtwinkligen Systemes aus mit der Geschwindigkeit c, deren Richtung die Winkel α, β, γ gegen die Achsen bildet.

Welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v herrschen an der Stelle xyz?

Wie viel Zeit braucht der Punkt, um bis hierher zu kommen?

Wo befindet er sich zur Zeit t, und welche Werthe haben in diesem Augenblicke die v_x, v_y, v_z und v?

In was für einer Bahn läuft er? Wie ist sie beschaffen für $C=B=A$ und $\gamma=\beta=\alpha$?

Lösung. Man findet zunächst

$$v_x = \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha + 2A^2 x},$$
$$v_y = \sqrt{c^2 \cos^2 \beta + 2B^2 y},$$
$$v_z = \sqrt{c^2 \cos^2 \gamma + 2C^2 z},$$

mithin

$$v = \sqrt{c^2 + 2\,(A^2 x + B^2 y + C^2 z)}\,.*$$

Zur Erreichung der Stelle xyz ist die Zeit

$$t = \frac{1}{A^2}(\sqrt{c^2 \cos^2\alpha + 2A^2 x} - c\cos\alpha) = \frac{1}{B^2}(\sqrt{c^2 \cos^2\beta + 2B^2 y} - c\cos\beta)$$
$$= \frac{1}{C^2}\sqrt{c^2 \cos^2\gamma + 2C^2 z} - c\cos\gamma)$$

nöthig. Zu derselben sind die Coordinaten des Ortes

$$x = (c\cos\alpha)\,t + \tfrac{1}{2}A^2 t^2,$$
$$y = (c\cos\beta)\,t + \tfrac{1}{2}B^2 t^2,$$
$$z = (c\cos\gamma)\,t + \tfrac{1}{2}C^2 t^2,$$

und die Geschwindigkeiten

$$v_x = c\cos\alpha + A^2 t,$$
$$v_y = c\cos\beta + B^2 t,$$
$$v_z = c\cos\gamma + C^2 t,$$
$$v = \sqrt{c^2 + 2c\,(A^2\cos\alpha + B^2\cos\beta + C^2\cos\gamma)\,t + (A^4 + B^4 + C^4)\,t^2}\,.$$

Alle diese Ausdrücke sprechen ziemlich einfache Gesetze aus.

Die xy-Projection der Bahn ist eine gemeine Parabel; ihre Gleichung lautet

$$B^4 x^2 + A^4 y^2 - 2A^2 B^2 xy - 2c\cos\beta\,(A^2 c\cos\beta - B^2 c\cos\alpha)\,x$$
$$+ 2c\cos\alpha\,(A^2 c\cos\beta - B^2 c\cos\alpha)\,y = 0.$$

In dem in der Aufgabe bezeichneten speciellen Falle ergiebt sich eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade, welche einen Winkel von 45^0 mit der x-Achse einschliesst. Das Analoge gilt für die beiden anderen Projectionen.

Aufgabe 97. Wie Nr. 96 und in demselben Umfange zu lösen; doch sind die beschleunigenden Kräfte den Coordinaten x, y, z proportional und haben nur für die Einheiten der letzteren die Werthe A^2, B^2, C^2.

Lösung. Die Geschwindigkeiten sind dann

$$v_x = \sqrt{c^2\cos^2\alpha + A^2 x^2},$$
$$v_y = \sqrt{c^2\cos^2\beta + B^2 y^2},$$
$$v_z = \sqrt{c^2\cos^2\gamma + C^2 z^2},$$
$$v = \sqrt{c^2 + A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}\,.$$

---

* Nochmals wird auf die am Schlusse von Nr. 73 stehende „Anmerkung“ aufmerksam gemacht.

Die Stelle xyz durchläuft der Punkt in dem Augenblicke

$$t = \frac{1}{A} l \frac{Ax + \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha + A^2 x^2}}{c \cos \alpha},$$

welcher auch bezeichnet werden kann, indem man auf der rechten Seite der Gleichung A, α und x durch B, β und y, bezüglich C, γ und z, ersetzt.

Ferner sind zur Zeit t die Ortscoordinaten

$$x = \frac{c \cos \alpha}{2A} (e^{At} - e^{-At}),$$

$$y = \frac{c \cos \beta}{2B} (e^{Bt} - e^{-Bt}),$$

$$z = \frac{c \cos \gamma}{2C} (e^{Ct} - e^{-Ct}),$$

und es herrschen um dieselbe die Geschwindigkeiten

$$v_x = \tfrac{1}{2} c \cos \alpha (e^{At} + e^{-At}),$$
$$v_y = \tfrac{1}{2} c \cos \beta (e^{Bt} + e^{-Bt}),$$
$$v_z = \tfrac{1}{2} c \cos \gamma (e^{Ct} + e^{-Ct}),$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Für die Bahn findet man

$$y = \frac{c \cos \beta}{2B} \left(\xi^{\frac{B}{A}} - \xi^{-\frac{B}{A}} \right)$$

als Gleichung der xy-Projection und

$$z = \frac{c \cos \gamma}{2C} \left(\xi^{\frac{C}{A}} - \xi^{-\frac{C}{A}} \right)$$

als solche des xz-Risses, wenn zur Abkürzung

$$\frac{Ax + \sqrt{A^2 x^2 + c^2 \cos^2 \alpha}}{c \cos \alpha} = \xi$$

gesetzt wird.

Für den am Schlusse der Aufgabe 96 erwähnten besonderen Fall geht auch hier die Bahn in eine geradlinige über, welche die Gleichungen $y = x$ und $z = x$ besitzt. Dieses Resultat ergiebt sich sofort auch ohne Rechnung aus der Natur der Sache.

Aufgabe 98. Zur Zeit Null befindet sich ein materieller Punkt an der Stelle abc eines rechtwinkligen Coordinatensystems in Ruhe. Er unterliegt seiner eigenen Schwere, die im Sinne der negativen z wirkt, und einer Anziehung nach dem Coordinatenanfange, welche dem Abstande r von demselben proportional ist und für $r = 1$ die Stärke k^2 hat.

Man soll in passender Reihenfolge berechnen, welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v zur Zeit t und an der Stelle xyz vorliegen; wie lange es dauert, bis der sich bewegende Punkt hier her kommt; welches um die Zeit t die Coordinaten seines Ortes sind; in was für einer Bahn er läuft; ob die Bewegung periodisch ist und in welcher Weise.

Lösung. Nach Verfluss der Zeit t herrschen die Geschwindigkeiten

$$v_x = -ak \sin kt,$$
$$v_y = -bk \sin kt,$$
$$v_z = -\frac{g + ck^2}{k} \sin kt,$$
$$v = -\frac{1}{k}\sqrt{(a^2+b^2)k^4 + (g+ck^2)^2} \sin kt$$

oder, wenn mit r_0 der ursprüngliche Abstand des Punktes vom Coordinatenanfange bezeichnet wird,

$$v = -\frac{1}{k}\sqrt{k^4 r_0^2 + g^2 + 2cgk^2} \sin kt.$$

An der Stelle xyz haben sie die Werthe

$$v_x = \pm k\sqrt{a^2 - x^2},$$
$$v_y = \pm k\sqrt{b^2 - y^2},$$
$$v_z = \pm \sqrt{k^2(c^2 - z^2) + 2g(c - z)}$$

oder, was mit den beiden vorhergehenden Ausdrücken besser übereinstimmt,

$$v_z = \pm k\sqrt{\left(\frac{g + ck^2}{k^2}\right)^2 - \left(z + \frac{g}{k^2}\right)^2}$$

und endlich

$$v = \pm \sqrt{k^2(r_0^2 - r^2) + 2g(c - z)},$$

welches letztere sehr leicht auf noch andere Formen gebracht, nämlich durch x, y oder z allein ausgedrückt werden kann.

Ferner ist

$$t = \frac{1}{k} arccos \frac{x}{a} = \frac{1}{k} arccos \frac{y}{b} = \frac{1}{k} arccos \frac{g + k^2 z}{g + k^2 c}$$

diejenige Zeit, zu welcher sich der Punkt an der Stelle xyz befindet.

Die Coordinaten der Letzteren haben, ausgedrückt durch die Erstere, die Werthe

$$x = a \cos kt,$$
$$y = b \cos kt,$$
$$z = \frac{1}{k^2} \{ (g + ck^2) \cos kt - g \}.$$

Mithin sind

$$y = \frac{b}{a} x,$$
$$z = \frac{g + ck^2}{ak^2} x - \frac{g}{k^2},$$
$$z = \frac{g + ck^2}{bk^2} y - \frac{g}{k^2}$$

die Gleichungen der drei Projectionen der Bahn. Dieselbe ist also eine Gerade, von dem Anfangspunkte abc nach derjenigen Stelle der z-Achse gerichtet, welche um $\frac{g}{k^2}$ unter dem Coordinatenanfange liegt.

Die vorstehenden Resultate lassen die Bewegung als eine periodische erkennen und zwar als eine solche, bei welcher

x, y und z gleich a, b und c sind zu den Zeiten $0,\ 2\frac{\pi}{k},\ 4\frac{\pi}{k}, \ldots$;

hingegen gleich 0, 0 und $-\frac{g}{k^2}$, für $t = \frac{1}{2}\frac{\pi}{k},\ \frac{3}{2}\frac{\pi}{k},\ \frac{5}{2}\frac{\pi}{k}, \ldots$;

endlich gleich $-a$, $-b$ und $-\frac{ck^2 + 2g}{k^2}$, wenn $t = \frac{\pi}{k},\ 3\frac{\pi}{k},\ 5\frac{\pi}{k}, \ldots$

Die Dauer einer ganzen Schwingung ist also

$$T = 2\frac{\pi}{k}.$$

Die Geschwindigkeit in der Bahn geht von 0 bis

$$V = \pm \frac{1}{k} \sqrt{(a^2 + b^2) k^4 + (g + ck^2)^2} = \pm \frac{1}{k} \sqrt{k^4 r_0^2 + 2cgk^2 + g^2}.$$

Aufgabe 99. In der Spitze O einer dreiseitigen Pyramide $OABC$, welche die Kantenlängen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und bei O eine rechtwinklige Ecke hat, befindet sich zur Zeit Null ein materieller Punkt in Ruhe. Er wird von den vier Ecken O, A, B, C proportional der Entfernung und zwar derartig angezogen, dass für die Einheit der letzteren die Stärke der Attraction gleich k^2 ist.

Es soll in geschickter Folge erforscht werden, wo sich der Punkt zu der Zeit t befindet, in was für einer Bahn er läuft, welche Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v er an der Stelle xyz und um die Zeit t besitzt, ob die Bewegung periodisch ist und wie.

Lösung. Auf ein System bezogen, dessen x-Achse OA, dessen y-Achse OB und dessen z-Achse OC ist, sind die Coordinaten des Ortes zur Zeit t

$$x = \tfrac{1}{2}\, a \sin^2 kt,$$
$$y = \tfrac{1}{2}\, b \sin^2 kt,$$
$$z = \tfrac{1}{2}\, c \sin^2 kt.$$

Hiernach erkennt man die Bahn als eine von O nach abc gerichtete Gerade.

An der Stelle xyz herrschen die Geschwindigkeiten

$$v_x = \pm k \sqrt{2x(a - 2x)},$$
$$v_y = \pm k \sqrt{2y(b - 2y)},$$
$$v_z = \pm k \sqrt{2z(c - 2z)},$$
$$v = \pm k \sqrt{2[(ax + by + cz) - 2(x^2 + y^2 + z^2)]}.$$

Die Letzte derselben kann auch leicht durch x, y oder z **allein** ausgedrückt werden, nämlich

$$v = \pm \frac{k}{a} \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)(a - 2x)x}$$

und analog

$$v = f(y), \quad v = f(z).$$

Um die Zeit t besitzen die Geschwindigkeiten die Werthe

$$v_x = \tfrac{1}{2}\, ak \sin 2kt,$$
$$v_y = \tfrac{1}{2}\, bk \sin 2kt,$$
$$v_z = \tfrac{1}{2}\, ck \sin 2kt,$$
$$v = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, k \sin 2kt.$$

Aus diesen Resultaten erhellt, dass die Bewegung eine periodische ist. Null und $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ sind die kleinsten, bezüglich die grössten Werthe, welche die Coordinaten x, y, z erreichen können; die kleinsten treten ein zu den Zeiten 0, $\frac{\pi}{k}$, $2\frac{\pi}{k}$, $3\frac{\pi}{k}$, ...; die grössten um $\frac{1}{2}\frac{\pi}{k}$, $\frac{3}{2}\frac{\pi}{k}$, $\frac{5}{2}\frac{\pi}{k}$, ...

Es ist daher $\frac{\pi}{k}$ die Dauer einer ganzen Schwingung.

Die Maximal- und Minimalwerthe von v_x, v_y, v_z und v sind bezüglich $\pm\frac{1}{2}ak$, $\pm\frac{1}{2}bk$, $\pm\frac{1}{2}ck$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}k$. Sie liegen vor zu den Zeiten $\frac{1}{4}\frac{\pi}{k}$, $\frac{3}{4}\frac{\pi}{k}$, $\frac{5}{4}\frac{\pi}{k}$, ..., d. i. dann, wenn $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{1}{4}b$, $z = \frac{1}{4}c$ ist.

Zu Null werden diese Geschwindigkeiten für

$$t = 0,\ \frac{1}{2}\frac{\pi}{k},\ \frac{2}{2}\frac{\pi}{k},\ \frac{3}{2}\frac{\pi}{k},\ \ldots.$$

Aufgabe 100. Drei constante Kräfte A, B, C, welche auf einander senkrecht stehen, beeinflussen einen materiellen Punkt, der anfänglich die Geschwindigkeit v_0 unter den Winkeln λ, μ, ν zu A, B, C besitzt. Das Mittel, in welchem er sich bewegt, widersteht der Geschwindigkeit proportional und derartig, dass für die Einheit derselben der Widerstand gleich k ist.

Die Coordinaten x, y, z des Ortes, die Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, v und der letzteren Grenzwerthe, sollen als Functionen der vom Bewegungsbeginne an gezählten Zeit t bestimmt werden und zwar bei Zugrundelegung eines Systems, für welches die Richtungen der Achsen der x, y und z zusammenfallen mit denen der Kräfte A, B und C.

Lösung. Man gelangt leicht zu folgenden Resultaten, in denen zur Abkürzung $v_0 \cos\lambda$ mit α, $v_0 \cos\mu$ mit β, $v_0 \cos\nu$ mit γ bezeichnet wurde:

$$x = \frac{1}{k^2}\{Akt + (A - k\alpha)(e^{-kt} - 1)\},$$

$$y = \frac{1}{k^2}\{Bkt + (B - k\beta)(e^{-kt} - 1)\},$$

$$z = \frac{1}{k^2}\{Ckt + (C - k\gamma)(e^{-kt} - 1)\},$$

$$v_x = \frac{1}{k} \{A - (A - k\alpha) e^{-kt}\},$$

$$v_y = \frac{1}{k} \{B - (B - k\beta) e^{-kt}\},$$

$$v_z = \frac{1}{k} \{C - (C - k\gamma) e^{-kt}\},$$

womit auch $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ bestimmt ist.

Die Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z und v nähern sich, wenn t in's Unendliche wächst, den Grenzen $\frac{A}{k}$, $\frac{B}{k}$, $\frac{C}{k}$, $\frac{1}{k}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; die Bewegung geht also nach und nach in eine gleichförmige über.

Capitel III.

Aufgaben über die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebenen festen Bahnen.

Erklärung. Die Bewegung eines Punktes auf einer vorgeschriebenen festen (unveränderlichen, starren) Linie oder Fläche lässt sich auf eine freie Bewegung desselben zurückführen, wenn man den Widerstand, welchen die Linie oder Fläche leistet, durch eine Normalkraft ersetzt. Es gelten dann eben die für freie Bewegung bekannten Sätze und Gleichungen. (Man vergleiche die „Erklärung" zu Cap. II.)

I. Bewegung auf einer ebenen festen Linie.

A. Ohne Widerstand.

Aufgabe 101. Auf einer in einer Verticalebene liegenden Curve (Fig. 10), deren Gleichung

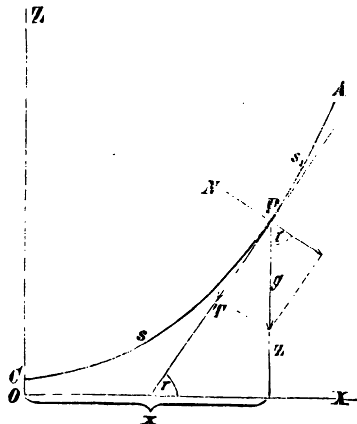
$$x = f(z)$$

gegeben ist, rollt ein materieller Punkt in Folge der alleinigen Wirkung der Schwere herab. Er beginnt seine Bewegung zur Zeit Null an einer Stelle A, deren z den Werth h besitzt, mit der Anfangsgeschwindigkeit c. Man soll

I. seine Bahngeschwindigkeit v als Function von z bestimmen, mit besonderer Berücksichtigung des Falles $c = 0$;

II. diejenige Zeit t, welche er braucht, um bis zur Höhe z herabzurollen;

Fig. 10.



III. soll man angeben, wie sich z, x, v, die Tangentialkraft T u der Druck D, welchen die Curve erleidet, als Functionen d Zeit t bestimmen lassen.

Lösung. I. Denkt man sich den von der Curve geleisteten W derstand durch eine Normalkraft N ersetzt, so lauten die Differentia gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -N \sin\tau = -N \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = N \cos\tau - g = N \frac{dx}{ds} - g,$$

wobei unter s der von der z-Achse aus gezählte Bogen verstanden ist.

Durch Elimination der Normalkraft N und mit Beachtung von

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

folgt hieraus

$$1) \qquad v = \pm \sqrt{c^2 + 2g(h - z)}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Geschwindigkeit v des Punkte ganz unabhängig ist von der Natur derjenigen Curve, auf welcher e herabrollt, dass sie vielmehr nur von der Höhe $h - z$ abhängt. Der Punk erlangt also, wenn er auf irgend einer verticalen Plancurve durc irgend eine Höhe herabrollt, dieselbe Geschwindigkeit, als wenn e diese Höhe frei durchfällt.

Für $c = 0$ ist

$$v = \pm \sqrt{2g(h - z)},$$

mithin die Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der durchrollte Höhe proportional.

Die Gleichung 1) kann übrigens auch — und schneller — dadurc gefunden werden, dass man g in eine normale und in eine tangentia Componente (T) zerlegt.

II. Diejenige Zeit t, welche verstreicht, bis der Punkt zur Höhe herabrollt, folgt aus 1) und aus

$$v = -\frac{ds}{dt} = -\frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{dt} = -\frac{\sqrt{1 + f'(z)^2}}{dt}\, dz$$

leicht zu

$$2) \qquad t = \mp \int \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{c^2 + 2g(h - z)}}\, dz + Const.$$

Sie ist also (im Gegensatze zu v) von der Art der Curve abhängig.

III. Aus 2) folgt

$$t = \varphi(z),$$

also, wenn diese Gleichung nach z lösbar ist,

$$z = \psi(t);$$

daher

$$x = f[\psi(t)]$$

und

$$v = \pm\sqrt{c^2 + 2g[h - \psi(t)]}.$$

Sodann hat man für die Tangentialkraft

$$T = g \sin\tau = g\frac{dz}{ds}.$$

Endlich ist der Druck D, welchen die Curve erleidet, die Resultante zur Normalcomponente der Schwere, d. i. zu $g\cos\tau = g\frac{dx}{ds}$, und zur Centrifugalkraft $\frac{v^2}{\varrho}$.

Diese Ausdrücke sind, unter Benutzung der vorhergehenden Gleichungen, schliesslich ebenfalls als Functionen von t darstellbar.

Aufgabe 102. Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t und wie gross ist um diese Zeit seine Geschwindigkeit v, wenn die Curve, auf welcher er herabrollt, die Gleichung

$$9g^2(x+a)^2 = (c^2 + 2gh - 1 - 2gz)^3$$

hat, alles Uebrige aber so ist, wie bei der vorhergehenden Aufgabe?

Lösung. Wenn man zunächst — nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie und der Differentialrechnung — die Curvenform untersucht, so bemerkt man gelegentlich mit, dass

$$c \geq 1$$

sein muss, falls das Herabrollen aus beliebig vorgeschriebenem h möglich sein soll. Ist nämlich $c < 1$, so ergiebt sich das grösste z der Linie kleiner als h, so dass dann die letztere gar nicht bis zu dem Anfangspunkte der Bewegung (A in Fig. 10) hinaufreicht.

Auf dem in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe eingeschlagenen Wege findet man

$$z = h - t$$

als diejenige Höhe, in welcher sich der rollende Punkt zur Zeit t befindet; ferner

$$v = \sqrt{c^2 + 2gt}$$

als die in diesem Augenblicke herrschende Geschwindigkeit.

Aufgabe 103. Im Allgemeinen wie Nr. 101. Die Gleichung der Bahn ist

$$g^2(x+b)^2 + 2gz - (c^2 + 2gh - 1) = 0,$$

wobei a der Abstand des Bewegungsanfanges A von der z-Achse. Der Ort und die Geschwindigkeit des Punktes sollen als Functionen der Zeit t bestimmt werden.

Lösung. Die Bahngleichung lehrt, dass man es mit einer gemeinen Parabel zu thun hat und dass auch hier $c \geqq 1$ sein muss, wenn für ein beliebig vorgeschriebenes h der Anfangspunkt A auf der Bahn liegen soll.

Für die Coordinaten des Ortes des Punktes erhält man

$$x = a + t,$$

$$z = \frac{1}{2g}(c^2 + 2gh - 1) - \tfrac{1}{2}g(a+b+t)^2;$$

für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{1 + g^2(a+b+t)^2}.$$

Aufgabe 104. Die Gleichung der Bahn, auf welcher ein schwerer Punkt herabrollt, sei

$$y = \tfrac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{x^5}{a}}$$

bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x-Achse vertical abwärts gerichtet ist. Die Bewegung beginne ohne Anfangsgeschwindigkeit im Ursprunge des Systems, und es wirke nur die Schwere.

Die Geschwindigkeit v, die Abscisse x und der von der Bahn erlittene Druck D sollen durch die Zeit t ausgedrückt werden.

Lösung. Der in den vorhergehenden Lösungen benutzte Weg führt zunächst auf die Gleichung

$$\int \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{x}{a}}}{x}}\, dx = \sqrt{2g}\, t + Const.$$

Mit Anwendung der Substitution

$$1 + \sqrt{\frac{x}{a}} = \xi$$

folgt hieraus sehr leicht

$$x = a\left[\sqrt[3]{(1+kt)^2} - 1\right]^2,$$

wobei

$$k = \tfrac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{2a}}$$

ist und die Zeit vom Beginne der Bewegung an gezählt wird.

Sodann ergiebt sich für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2ag}\,[\sqrt[3]{(1+kt)^2} - 1];$$

ferner für den Druck

$$D = \frac{g}{2} \frac{\sqrt{(1+kt)^{\frac{2}{3}} - 1}}{1+kt} \left\{ 2(1+kt)^{\frac{2}{3}} + 1 \right\}.$$

Aufgabe 105. Ohne Anfangsgeschwindigkeit rollt (von dem Coordinatenursprunge O aus) ein schwerer Punkt auf der Lemniscate

$$r = a\sqrt{\cos 2\psi} = a\sqrt{\sin 2\theta}$$

herab. Man soll

I. die Zeit t bestimmen, nach deren Verlauf die allgemeine Stelle P der Curve erreicht wird und

II. diese Zeit mit derjenigen (t_1) vergleichen, welche zum Durchrollen des Leitstrahles OP nöthig sein würde.

Lösung. Zunächst kommt man auf

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta \cos\theta \sqrt{\sin 2\theta}}}.$$

Da sich diess auf die Form

$$t = \sqrt{\frac{a}{4\sqrt{2g}}} \int (\tan\theta)^{-\frac{3}{4}} (\sec\theta)^2 \, d\theta$$

bringen lässt, so entsteht

$$t = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\,a}{g}} \sqrt[4]{\tan\theta},$$

wenn vom Bewegungsbeginne an gezählt wird.

II. Die Zeit t_1, welche der Punkt brauchen würde, um auf dem Leitstrahle OP herabzurollen, ist (Lösung der Aufg. 5) bestimmt durch

$$s = \tfrac{1}{2} g \cos\theta \,.\, t_1^2.$$

Umgeformt und auf t_1 reducirt liefert diess den Satz, dass die beiden Zeiten t und t_1 einander gleich sind.

Aufgabe 106. Das Herabrollen eines schweren Punktes erfolgt auf der starren Curve

$$z = kx - \frac{g}{2c^2} x^2.$$

Es beginnt zur Zeit Null an der Stelle A, deren Coordinaten sind

$$x_0 = \frac{c^2 k}{g}, \quad z_0 = \frac{c^2 k^2}{2g}.$$

Dabei ist k eine positive Constante und c die im Sinne der Abscissen gerichtete Anfangsgeschwindigkeit.

Es soll zunächst die Natur und Lage der vorgeschriebenen Bahn angegeben werden, nachher aber die Art der Bewegung des Punktes, nämlich wie gross seine Geschwindigkeit v an jeder Stelle z und zu jeder Zeit t ist, wie lange er braucht, um bis zur Höhe z herabzurollen, wie sich die Coordinaten seines Ortes als Functionen von t ausdrücken lassen und welchen Druck D die Curve zu jeder beliebigen Zeit erleidet.

Lösung. Dass die Bahn eine gemeine Parabel ist, deren Achse der z-Achse des Coordinatensystems parallel liegt, erkennt man sofort aus der Art ihrer Gleichung. Bringt man die Letztere auf die Normalform $\xi^2 = 2p\zeta$, so lautet sie

$$\left(x - \frac{c^2 k}{g}\right)^2 = \frac{2c^2}{g}\left(\frac{c^2 k^2}{2g} - z\right),$$

lehrt also, dass A der Scheitel ist und $\frac{c^2}{g}$ der Halbparameter.

Für die Geschwindigkeit des Herabrollens findet man

$$v = \sqrt{c^2(1 + k^2) - 2gz} \text{ und } v = \sqrt{c^2 + g^2 t^2}.$$

Bis zur Erreichung der Höhe z verstreicht die Zeit

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{c^2 k^2 - 2gz}.$$

Die Coordinaten des Ortes sind

$$x = \frac{c^2 k}{g} + ct,$$

$$z = \frac{c^2 k^2}{2g} - \frac{g}{2} t^2.$$

Der Druck D ergiebt sich zu Null. Diess lehrt, dass die vorgeschriebene feste Bahn gerade diejenige Parabel ist, in welcher der schwere Punkt frei gefallen sein würde, wenn er von A aus mit der Anfangsgeschwindigkeit c horizontal fortgeschleudert worden wäre. Hiervon kann man sich auch leicht unmittelbar überzeugen. (Aufgabe 65 ist zu vergleichen.)

Aufgabe 107. Auf welcher Linie rollt ein Punkt, der nur seiner :hwere unterliegt, so herab, dass er sich mit der Geschwindigkeit c eichförmig vom Horizonte entfernt?

Lösung. Wir nehmen den Anfangspunkt der Bewegung als Cordinatenursprung, legen die x-Achse horizontal, die z-Achse vertical ach unten. Dann ergiebt sich (aus der Bedingung, dass die Achseneschwindigkeit v_z constant, nämlich gleich c, sein soll)

$$\sqrt{\frac{c^2+2gz}{1+x'^2}}=c$$

ls Differentialgleichung der gesuchten Curve. Hieraus folgt

$$x^2=\frac{8g}{9c^2}z^3.$$

Die Bahn ist also eine semicubische oder Neil'sche Parabel – die bekannte Evolute der gemeinen.

Aufgabe 108. Wie Nr. 107; doch soll der rollende Punkt sich leichförmig von der Anfangsstelle seiner Bahn entfernen, d. h. es soll n der Richtung der geradlinigen Verbindung des Ursprunges mit dem etreffenden Curvenpunkte immer die Geschwindigkeit c herrschen.

Lösung. Da v_r gleich c sein muss, so lautet die Differentialleichung der Bahn

$$v\frac{dr}{ds}=c.$$

Dabei ist ein Polarcoordinatensystem zu Grunde gelegt, mit ver:al nach unten gerichteter Achse und dem Bewegungsursprunge Pol.

Auf dieses bezogen ergiebt sich die Polargleichung der Bahn zu

$$r=\left(\frac{c}{2\sqrt{2g}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}+Const\right)^2$$

r auch, wenn die Substitution $\cos\theta=u$ benutzt wird, zu

$$r=\left(Const-\frac{c}{2\sqrt{2g}}\int\frac{du}{\sqrt{u-u^3}}\right)^2.$$

In beiden Ausdrücken müssen die Integralwerthe, die durch Quaturen bestimmt werden können, so genommen werden, dass für $=0$ auch $r=0$ wird.

Aufgabe 109. Das Herabrollen eines nur der Schwere unterliegnden Punktes beginnt mit der Anfangsgeschwindigkeit c an einer

Bahnstelle A. Es soll derartig erfolgen, dass sich derselbe dabei um ein festes Centrum O mit einer Winkelgeschwindigkeit bewegt, welche der Entfernung von dem letzteren umgekehrt proportional ist und für deren Einheit den Werth c hat. Das Centrum O befindet sich in der Ebene der Curve und zwar in dem senkrechten Abstande $OA = 1$ von der letzteren.

Die Polargleichung der Bahn soll bestimmt werden. Die Achse des Coordinatensystems wird durch O, senkrecht zu OA und vertical nach unten gelegt. O gilt als Pol.

Lösung. Man findet

$$r = \frac{2c^2}{g\left(\int \sqrt{\cos\theta}\, d\theta + Const\right)}$$

oder, wenn $\cos\theta = \omega$ gesetzt wird,

$$r = \frac{2c^2}{g\left(Const - \int \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega^2}}\, d\omega\right)},$$

wobei die Constante so genommen werden muss, dass für $\theta = \frac{\pi}{2}$ sich $r = 1$ ergiebt.

Aufgabe 110. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Achse vertical nach unten liegt, ist eine gemeine Kettenlinie durch ihre Gleichung

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

gegeben. Auf der Aussenseite derselben rollt ein Punkt in Folge der alleinigen Wirkung seiner Schwere herab. Er beginnt seine Bewegung an der Stelle A, deren z gleich a ($> k$) ist.

Man soll denjenigen Ort bestimmen, an welchem der Punkt die Bahn verlässt (von ihr abspringt) und zwar sowohl für den Fall, dass eine Anfangsgeschwindigkeit c da ist, als auch für den, dass keine vorliegt. Dabei wird c selbstverständlich derartig vorausgesetzt, dass es nicht ein sofortiges Wegfliegen veranlasst.

Lösung. Das Abspringen tritt offenbar da ein, wo die Normalcomponente der Schwere, welche nach innen gerichtet ist, der nach aussen wirkenden Centrifugalkraft gleich wird. Für die Erstere findet man

$$gk\frac{1}{z};$$

für die Letztere hingegen, wenn zunächst Anfangsgeschwindigkeit vorausgesetzt wird,

$$k\frac{c^2+2g(z-a)}{z^2}.$$

Diess liefert als Ordinate der Abspringstelle

$$z=\frac{2ag-c^2}{g}$$

und, wenn das Rollen vom Ruhezustande aus beginnt,

$$z=2a.$$

Beide Ausdrücke sind vom Parameter der Kettenlinie unabhängig. Der Erste hängt nur ab von a, c und g; der Letzte nur von a.

Aufgabe 111. Wie Nr. 110, doch ist die Bahn die allgemeine Curve $x=f(z)$.

Lösung. Auf dem vorhin angedeuteten Wege findet man, dass

1) $$gx'(1+x'^2)+[c^2+2g(z-a)]\,x''=0$$

diejenige Gleichung ist, aus welcher sich das z der Abspringstelle ergiebt, wenn für x' und x'' die aus der gegebenen Bahngleichung entnommenen Werthe eingesetzt werden.

Benutzt man statt x' $\left(\text{also statt } \frac{dx}{dz}\right)$ lieber z' $\left(\text{nämlich } \frac{dz}{dx}\right)$, so geht 1) über in

$$g(1+z'^2)-[c^2+2g(z-a)]\,z''=0.$$

Aufgabe 112. Mittelst der Gleichung 1) der vorigen Aufgabe soll man untersuchen, wo der rollende Punkt, wenn er seine Bewegung im Coordinatenursprunge ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt, von der Bahn

$$z=\sqrt{\left(\frac{x}{k}\right)^3}$$

abspringen wird.

Lösung. Die genannte Gleichung 1) liefert für diesen Fall

$$z=\sqrt{\left(-\frac{4k^2}{3}\right)^3},$$

lehrt also, dass gar kein Abspringen erfolgt.

Bei einiger Aufmerksamkeit wird man aber die zu diesem imaginären Werthe von z führende Rechnung gar nicht erst ausführen, vielmehr zunächst die Form der Bahn beachten und dabei sogleich bemer-

ken, dass im Coordinatenanfange eine horizontale Tangente vorliegt, der Punkt mithin überhaupt gar nicht in Bewegung geräth.

Aufgabe 113. Aus der Höhe h soll (mit der Anfangsgeschwindigkeit c) ein nur der Schwere unterliegender Punkt auf fester Bahn so herabrollen, dass die Zeit t, welche er zum Herabkommen auf $h-z$ braucht, immer gleich $x-a$ ist, wobei x und z die rechtwinkligen Coordinaten sind und a eine gegebene Constante ist.

Es soll, mit Benutzung der Lösung der Aufgabe 101, bestimmt werden, welcher Art die Bahn sein muss, um diese Bewegung herbeizuführen.

Lösung. Die unter 101 dagewesene Gleichung 2) führt zu dem Resultate, dass die Curve, auf welcher der Punkt herabrollt, der Bedingung

$$g^2(x-C)^2+2gz-(c^2+2gh-1)=0$$

genügen muss. Hierbei ist C eine beliebige Constante. Da sich der Ausdruck leicht auf die Form

$$(x-C)^2=2\frac{1}{g}\left(\frac{c^2+2gh-1}{2g}-z\right)$$

bringen lässt, so erkennt man, dass die gesuchte Bahn eine mit dem Halbparameter $\frac{1}{g}$ construirte gemeine Parabel ist, deren Achse der vertical stehenden z-Achse des Systems parallel liegt, deren Scheitel von der x-Achse um $\frac{c^2+2gh-1}{2g}$ absteht, sonst aber beliebig gewählt werden darf.

Aufgabe 114. Wie Nr. 113; jedoch soll die Zeit t der durchrollten Höhe $h-z$ proportional sein und für die Einheit derselben gleich k.

Lösung. Man findet, dass

$$(x+C)^2=\frac{1}{9g^2k^4}\left\{k^2\,(c^2+2g\,[h-z])-1\right\}^3$$

die Gleichung der Bahn sein muss. Form und Natur derselben können hiernach leicht ermittelt werden, wobei selbstverständlich auch mit zu beachten ist, welchen Werth h höchstens haben darf, wenn die vorgeschriebene Anfangsstelle der Bewegung überhaupt noch auf der Curve liegen soll.

Aufgabe 115. An der Aussenseite einer festen Curve, welche f ein Coordinatensystem bezogen ist, dessen z-Achse vertical nach ten und dessen x-Achse horizontal liegt, rollt ein schwerer Punkt rab. Er beginnt seine Bewegung an derjenigen Stelle der Linie, ren z gleich a ist, mit der Anfangsgeschwindigkeit c. Zu berechnen ist, elcher Art die Bahn sein muss, wenn sie von dem rollenden Punkte irgends einen Druck erleiden soll.

Lösung. Dass der Druck verschwindet, kommt nur dann vor, enn die Verticalcomponente der Schwere der Centrifugalkraft gleich t und im entgegengesetzten Sinne wirkt. Diese Bemerkung liefert die ifferentialgleichung

$$g x' (1 + x'^2) + [c^2 + 2g(z - a)] x'' = 0.$$

us derselben folgt zunächst

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \frac{A}{\sqrt{(c^2 - 2ag) + 2gz}}$$

d dann

$$x = \frac{A}{2g} 2 \sqrt{(c^2 - 2ag - A^2) + 2gz} + B,$$

bei A und B zwei willkürliche Integrationsconstanten sind.

Die letzte Gleichung lehrt, auf die Form

$$(x - B)^2 = 2\frac{A^2}{g}\left(z - \frac{A^2 + 2ag - c^2}{2g}\right)$$

racht, dass die gesuchte Bahn eine gemeine Parabel vom Halbameter $\frac{A^2}{g}$ ist, deren Achse der z-Achse parallel liegt und deren eitel die Coordinaten B und $\frac{c^2 - 2ag - A^2}{2g}$ hat.

Diese Parabel kann auch in eine verticale Gerade übergehen.

Beides kann man voraussagen, ohne die Rechnung durchzuführen.

Die Constante A wird bestimmbar, wenn man festsetzt, dass im fange (also für $z = a$) der von der Richtung der Geschwindigkeit mit r z-Achse gebildete Winkel gleich α (also $x' = \tan\alpha$) sein soll; man det dann

$$A = c \sin\alpha.$$

Ebenso folgt

$$B = \frac{bg}{c^2 \sin\alpha \cos\alpha},$$

lls noch vorgeschrieben wird, dass $x = b$ sein soll, wenn $z = a$ ist.

Aufgabe 116. Auf welcher ebenen Curve rollt ein nur der Schwere unterliegender Punkt, der seinen Lauf mit der Anfangsgeschwindigkeit c beginnt, so herab, dass der auf die Bahn ausgeübte Druck überall gleich g ist?

Lösung. Wir nehmen den Ausgangspunkt der Bewegung als Coordinatenanfang, legen die x-Achse horizontal und die z-Achse vertical nach unten.

Als Differentialgleichung der gesuchten Curve folgt

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dz}{k+z}=-\frac{dx'}{(1+x'^2)\,(\sqrt{1+x'^2}-x')},$$

wobei

$$k=\frac{c^2}{2g},$$

also die zur Anfangsgeschwindigkeit gehörende Geschwindigkeitshöhe ist. Von hier aus gelangt man zuerst auf

$$A\sqrt{k+z}=(x'+\sqrt{1+x'^2})\sqrt{1+x'^2};$$

nachher zu

$$x=\pm\int\frac{A\sqrt{k+z}-1}{\sqrt{2A\sqrt{k+z}-1}}\,dz$$

und findet endlich, dass

$$x=\pm\frac{2}{5A^2}\sqrt{2A\sqrt{k+z}-1}\,[A^2(k+z)-A\sqrt{k+z}-1]+B$$

die Gleichung der verlangten Bahn ist.

Die in derselben vorkommenden Integrationsconstanten A und B können daraus bestimmt werden, dass die Curve durch den Coordinatenanfang geht und daselbst die Geschwindigkeit c herrscht.

Aufgabe 117. Ein materieller Punkt ist auf einer allgemeinen festen Plancurve beweglich und unterliegt der alleinigen Wirkung einer Kraft Z. Man kennt die Gleichung der Bahn bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und weiss, dass Z eine Function von z ist (im Sinne der positiven Ordinaten wirkend). Der Lauf beginnt an derjenigen Bahnstelle A, deren z gleich h ist, mit der Anfangsgeschwindigkeit c und zur Zeit Null. Zu berechnen sind

I. die Geschwindigkeit v, welche der Punkt in der Höhe z besitzt;

II. die Zeit t, welche er braucht, um diese Höhe zu ersteigen;

III. der Druck D, den die Bahn an jeder Stelle erleidet.

Lösung. Der bei Nr. 101 angedeutete Weg leitet hier zu folgenn Resultaten:

I. Die Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{2\int Z\,dz + Const},$$

obei die Constante sich aus der Bedingung ergiebt, dass v gleich c ein muss, wenn z den Werth h besitzt.

Wie man sieht, hängt v nicht von der Natur der Bahn ab, sondern ur von z.

II. Für die zum Ersteigen der Höhe z nöthige Zeit folgt (als aboluter Werth)

$$t = \int \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{2\int Z\,dz + Const}}\,dz + Const.$$

Die neue Constante ist hierbei daraus bestimmbar, dass für $z = h$ $= 0$ sein muss.

III. Der Druck D setzt sich zusammen aus der Normalcomponente er Kraft Z, nämlich

$$Z \cos\tau = Z\frac{dx}{ds},$$

d aus der Centrifugalkraft

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{2\int Z\,dz + Const}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,z''.$$

Aufgabe 118. Die vorgeschriebene Bahn sei eine Kettenlinie der Gleichung

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right);$$

Kraft Z sei dem z proportional und habe für die Einheit desselben Intensität $\frac{c^2}{k^2}$. Die Bewegung möge im Scheitel der Curve beginnen. Uebrigen sei Alles wie bei der vorigen Aufgabe; auch werde die sung in demselben Umfange verlangt.

Lösung. Bei Beachtung des Vorhergehenden findet man leicht, ss die Geschwindigkeit v der erstiegenen Höhe z proportional und r deren Einheit gleich $\frac{c}{k}$ ist.

Für die Steigzeit t folgt

$$t = \frac{k}{c}\,l\,\frac{z + \sqrt{z^2 - k^2}}{k},$$

wofür auch

$$t = \frac{1}{c} x$$

geschrieben werden kann.

Der von der Bahn auszuhaltende Druck D ist hier gleich der Normalcomponente von Z vermindert um die Centrifugalkraft. Für Beide ergiebt sich derselbe Werth, nämlich $\frac{c^2}{k}$. Die Linie erleidet mithin nirgends eine Pressung.

Aufgabe 119. Es soll der aufsteigende Punkt sich in gleichen Zeiten um gleich viel vom Horizonte entfernen und zwar mit der Geschwindigkeit c. Die Kraft Z soll der erstiegenen Höhe z immer proportional sein und für $z = 1$ den Werth k^2 haben. Welcher Art ist die Bahn, in der man das Aufsteigen muss erfolgen lassen?

Lösung. Wir legen den Coordinatenanfang in den Ursprung der Bewegung; die x-Achse horizontal, die z-Achse vertical nach oben. Da nun v_z gleich c sein soll und für v sich leicht $\sqrt{c^2 + k^2 z^2}$ ergiebt, so folgt als Differentialgleichung der gesuchten Linie

$$\frac{z' \sqrt{c^2 + k^2 z^2}}{\sqrt{1 + z'^2}} = c.$$

Die Integration derselben liefert

$$z^2 = 2 \frac{c}{k} x.$$

Es ist daher die vorzuschreibende Bahn eine gemeine Parabel, deren Scheitel mit dem Anfangspunkte der Bewegung zusammenfällt, deren Achse horizontal liegt und deren Halbparameter die Länge $\frac{c}{k}$ hat.

Aufgabe 120. Wie Nr. 109; doch wirkt nicht die Schwere g sondern eine Kraft $k^2 z$ (wobei z den Abstand von OA bedeutet).

Lösung. Die Bahn muss nach der Gleichung

$$r = \frac{c}{c + k(1 - \sin\theta)}$$

gekrümmt sein.

Aufgabe 121. Auf der vorgeschriebenen festen Bahn

$$x = f(z)$$

rollt ein Punkt, beeinflusst von beliebigen Kräften, die sich vereinigen lassen zu den beiden constanten A und B, welche im Sinne

der positiven x, bezüglich in dem der positiven z, thätig sind. Er beginnt seine Bewegung mit der Geschwindigkeit c in einem Curvenpunkte, dessen z gleich h ist.

Mit welcher Bahngeschwindigkeit v und zu welcher Zeit t durchläuft der sich Bewegende die allgemeine Stelle xz der ihm vorgezeichneten Linie?

Welchen Druck D erleidet die Letztere?

Wie vereinfachen sich die Resultate, wenn B die im Sinne der negativen z wirkende Schwere, A aber gleich Null ist?

Lösung. Auf dem bei Nr. 101 angegebenen Wege findet man

$$v^2 = c^2 + 2A\,\{f(z) - f(h)\} + 2B\,(z - h)$$

und

$$t = \int \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{c^2 + 2A\,\{f(z) - f(h)\} + 2B\,(z - h)}}\, dz + Const,$$

wobei sich die Constante aus der Bedingung ergiebt, dass t gleich Null sein muss, wenn z gleich h ist.

Die Componenten, aus denen sich der Druck D zusammensetzt (Normalkraft und Centrifugalkraft), sind

$$N = \frac{A\,dz - B\,dx}{\sqrt{1 + f'(z)^2}\,dz}$$

und

$$C = \frac{c^2 + 2A\,\{f(z) - f(h)\} + 2B\,(z - h)}{[1 + f'(z)^2]^{\frac{3}{2}}}\, f''(z).$$

Für den in der Aufgabe hervorgehobenen besonderen Fall gehen alle diese Resultate in die unter Nr. 101 angeführten über.

Aufgabe 122. Die Resultirenden der beschleunigenden Kräfte sind nicht constant (wie sie es bei der vorigen Aufgabe waren), sondern es ist die eine derselben irgend eine Function der Abscisse, die andere eine der Ordinate [$X = \varphi(x)$, $Z = \psi(z)$]. Im Uebrigen liegen die Verhältnisse von Nr. 121 vor. Bahngeschwindigkeit v, Laufzeit t und Druck D werden (als Functionen von z) gesucht. Ferner soll angegeben werden, wie sich z, v und D durch t ausdrücken lassen; endlich, wie aus den entwickelten Gleichungen die Resultate der Aufgaben 101 und 121 folgen.

Lösung. Von dem für die Tangentialkraft allgemein geltenden Werthe

$$T = v \frac{dv}{ds}$$

ausgehend, gelangt man zu der Differentialgleichung

1) $$v\,dv = X\,dx + Z\,dz.$$

Aus ihr folgt

2) $$v = \pm \sqrt{2\int X\,dx + 2\int Z\,dz + C_1},$$

wobei die Constante C_1 dadurch bestimmt ist, dass für $z = h$ $v = c$ sein muss.

Diese Gleichung giebt v durch z ausgedrückt (wie die Aufgabe es verlangt), denn es ist $Z = \psi\,(z)$ und $X = \varphi\,(x)$, das x aber hängt durch die Bahngleichung von z ab.

Für die Laufzeit ergiebt sich

3) $$t = \int \frac{\sqrt{1 + f'\,(z)^2}}{\sqrt{2\int X\,dx + 2\int Z\,dz + C_1}}\,dz + C_2.$$

Hierin ist, wie immer, $f'\,(z) = \frac{dx}{dz}$, und die Constante folgt aus der Bemerkung, dass anfänglich (zur Zeit Null) dem z der Werth h zukommt.

Der Druck D setzt sich zusammen aus der Normalkraft

4) $$N = \frac{X\,dz - Z\,dx}{\sqrt{1 + f'\,(z)^2}\,dz}$$

und aus der Centrifugalkraft

5) $$C = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{2\int X\,dx + 2\int Z\,dz + C_1}{(\sqrt{1 + f'\,(z)^2})^{\frac{3}{2}}}\,f''\,(z),$$

wobei $f''\,(z) = \frac{df'\,(z)}{dz}$.

Wird die Gleichung 3) auf z reducirt — vorausgesetzt, dass diess geschehen kann — und der erhaltene Werth in 2), 4) und 5) eingeführt, so sind dann z, v und D als Functionen der Zeit bestimmt.

Die Resultate der Lösung der Aufgabe 121 folgen, wie man leicht übersieht, wenn $X = A$ und $Z = B$ gesetzt wird; aus ihnen ferner die von Nr. 101, für $A = 0$ und $B = -g$.

Aufgabe 123. Auf einem über dem Durchmesser $OA = a$ gezeichneten Halbkreise ist ein Punkt beweglich. Er unterliegt nur einer Anziehung, welche ihren Sitz in O hat, der dritten Potenz der Entfernung r umgekehrt proportional wirkt und für die Einheit derselben gleich k^2 ist. In A, dem Anfangspunkte, herrscht die Geschwindigkeit c.

Man soll, unter der Voraussetzung $c > \frac{k}{a}$, diese Bewegung untersuchen, nämlich die Bahngeschwindigkeit v und die Laufzeit t in passender Weise bestimmen.

Lösung. Mit Benutzung des im Eingange zur vorigen Lösung angeführten Werthes

$$T = v \frac{dv}{ds}$$

der Tangentialkraft, gelangt man zu der Differentialgleichung

$$\frac{v\,dv}{\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta} = \frac{k^2}{r^3} \sin\theta,$$

in welcher θ denjenigen Winkel bezeichnet, den der nach O gerichtete Leitstrahl r mit OA bildet.

Durch Integration folgt hieraus

$$v^2 = c^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 tan^2\theta,$$

womit die Geschwindigkeit als Function der Anomalie bestimmt ist.

Zu demselben Resultate kommt man auch, wenn man von der Gleichung 1) der vorigen Lösung ausgeht. Wird OA als x-Achse genommen und durch O senkrecht dagegen die z-Achse gelegt, so ergiebt sich nämlich zunächst

$$v\,dv = -k^2 \frac{x\,dx + z\,dz}{(x^2 + z^2)^2};$$

hieraus sodann, als Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Abscisse,

$$v^2 = c^2 + \frac{k^2}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)$$

und endlich, wenn man für x lieber θ einführt, der vorige Werth.

Versucht man nun mittelst der bekannten Gleichung

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + z'^2}\,dx}{dt}$$

den Zusammenhang zwischen Abscisse und Zeit zu finden, so gelangt man auf

$$t = \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 k^2 + a(a^2 c^2 - 2k^2)x - (a^2 c^2 - k^2)x^2}},$$

was nach bekannter Reductionsformel leicht weiter behandelt werden kann.

Geht man hingegen aus von

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta}{dt},$$

so kommt man auf die Differentialgleichung

$$a \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \tan^2\theta},$$

durch diese aber zu dem Resultate

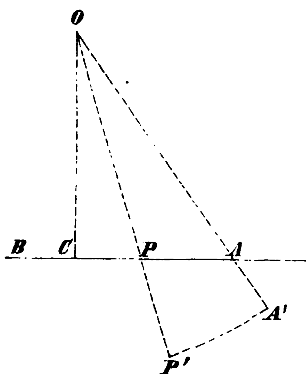
$$t = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 c^2 - k^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 c^2 - k^2}}{ac} \sin\theta.$$

Die zum Durchlaufen des ganzen Halbkreises nöthige Zeit ist mithin

$$t_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 c^2 - k^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 c^2 - k^2}}{ac}.$$

Aufgabe 124. Eine Masse m, die sich in dem festen Punkte O befindet (Fig. 11), welcher um b von der Geraden AB absteht, wirkt nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf einen Punkt, der sich nur auf der genannten Geraden bewegen kann. Er beginnt seinen Lauf in A (also unter dem Winkel $COA = \alpha$) ohne Anfangsgeschwindigkeit und befindet sich zur Zeit t in P. Die Anziehung, welche in der Entfernung 1 von der Masse 1 auf die Masse 1 ausgeübt wird, ist gleich k; $CA = a$. Man soll berechnen

Fig. 11.



I. die Geschwindigkeit v des Punktes als Function des Winkels $COP = \theta$;

II. den Druck D, welchen die geradlinige Bahn erleidet, ebenfalls als Function von θ und auch als solche von $r = OP$.

Ferner, unter der Voraussetzung so kleiner α und θ, dass die vierten Potenzen derselben vernachlässigt werden können, also $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ und $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ gesetzt werden darf,

III. diejenige Zeit t (ausgedrückt durch θ), welche der Punkt braucht, um von A an die allgemeine Stelle P zu gelangen; die Zeit t_1 für einen Hingang von A bis C und die Zeit T für eine ganze Schwingung.

IV. Endlich soll man, unter derselben Voraussetzung, die Länge L desjenigen einfachen Pendels bestimmen, dessen Schwingungen — von O aus betrachtet — ebenso aussehen wie die, welche der Punkt längs der Geraden AB ausführt.

Lösung. I. Die unter 122 angeführte Gleichung

$$v\,dv = X\,dx + Z\,dz$$

führt zu

$$v = \pm K\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha},$$

wobei K die Abkürzung für $\sqrt{\frac{2km}{b}}$ ist. Dieser Werth von v lässt sofort die Art der Bewegung erkennen.

II. Der Druck, den die Bahn erleidet, ist der dritten Potenz des Abstandes von O umgekehrt proportional, nämlich

$$D = \frac{bkm}{r^3};$$

oder, was auf Dasselbe hinauskommt, er steht in directem Verhältnisse zu der dritten Potenz des Cosinus von θ:

$$D = \frac{km}{b^2}\cos^3\theta.$$

III. Bei der Bestimmung der Zeit t kommt man zunächst auf

$$t = -\frac{b}{K}\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Durch Vernachlässigung der vierten Potenzen von α und θ führt diess zu

$$t = -\frac{b\sqrt{2}}{K}\int\frac{d\theta}{(1-\theta^2)\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}.$$

Setzt man

$$\frac{\theta}{\alpha} = \sin\omega,$$

so entsteht

$$t = -\frac{b\sqrt{2}}{K}\left\{(1+\tfrac{1}{2}\alpha^2)\,\omega - \tfrac{1}{4}\alpha^2 \sin 2\omega\right\} + Const.$$

und schliesslich

$$t = \frac{b\sqrt{2}}{K}\left\{(1+\tfrac{1}{2}\alpha^2)\, arc\cos\frac{\theta}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\alpha^2-\theta^2}\right\}.$$

Die Dauer eines Hinganges von A bis C ist hiernach

$$t_1 = \frac{\pi b}{2}\sqrt{\frac{b}{km}}\,(1+\tfrac{1}{2}\alpha^2)$$

und die einer ganzen Schwingung das Vierfache hiervon.

IV. Ein einfaches Pendel von der Länge $L = OP'$ hat bekanntlich die Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{2gL\,(\cos\theta - \cos\alpha)}.$$

Hieraus folgt, dass

$$L = \frac{b^3 g}{km\cos^4\theta}$$

sein muss, wenn seine Schwingungen — von O aus betrachtet — gerade so aussehen sollen, wie die des längs AB sich bewegenden Punktes. Für kleine Ausschlagswinkel ist diese Pendellänge näherungsweise constant, nämlich

$$L = \frac{b^3 g}{km}.$$

Aufgabe 125. Auf der festen logarithmischen Spirale

$$r = a e^{-\theta}$$

ist ein Punkt beweglich, welcher nach dem asymptotischen Centrum indirect proportional dem Quadrate der Entfernung r derartig angezogen wird, dass diese Anziehung für die Einheit von r gleich k ist — der sonst aber keiner Kraft unterliegt. Er beginnt seine Bewegung in einem Abstande b vom Centrum ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Es soll, unter Benutzung eines Polarcoordinatensystems, dessen Ursprung der asymptotische Punkt der Spirale ist, berechnet werden:

I. die Geschwindigkeit v an der allgemeinen Stelle θr der Bahn;

II. die Zeit t, welche verstreicht, bis diese Stelle erreicht wird;

III. der Druck D, den die Curve hierselbst erleidet;

IV. die Grenzen, denen sich die Werthe von v, t und D nähern.

Lösung. I. Auf dem bei den vorhergehenden Lösungen mehrfach angegebenen Wege findet man

$$v = \sqrt{\frac{2k}{b}\,\frac{b-r}{r}} = \sqrt{\frac{2k}{ab}\,(b e^{\theta} - a)}.$$

II. Bei der Bestimmung von t gelangt man anfänglich zu

$$t = \sqrt{\frac{b}{k}} \int \sqrt{\frac{r}{b-r}}\, dr$$

und kommt dann, mit Benutzung der Substitution

$$r = b \cos^2 \frac{\omega}{2},$$

auf

$$t = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{b}{k}}\, (\omega + \sin \omega),$$

wobei

$$\omega = 2 \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{r}{b}}.$$

III. Der von der Bahn erlittene Druck ist

$$D = C - N.$$

Für die Centrifugalkraft ergiebt sich

$$C = \frac{k\sqrt{2}}{b} \cdot \frac{b-r}{r^2};$$

für die Normalkraft hingegen

$$N = \frac{k}{r^2 \sqrt{2}}.$$

Man hat daher

$$D = \frac{k}{b\sqrt{2}} \cdot \frac{b-2r}{r^2}.$$

Dieser Druck ist anfänglich — für $2r > b$ — nach innen gerichtet, wird zu 0 für $r = \frac{b}{2}$ und geht für noch kleinere r nach aussen, mit abnehmendem Leitstrahle fortwährend wachsend.

IV. Die Geschwindigkeit nähert sich desto mehr dem Werthe ∞, je näher der sich bewegende Punkt dem asymptotischen Centrum kommt.

Die Laufzeit convergirt gegen die Grenze

$$T = \frac{b\pi}{2} \sqrt{\frac{b}{k}}.$$

Der Druck D wächst in's Unendliche, wenn r in Null übergeht.

$$t = \frac{b l}{K} \ldots \left\{ 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \omega - \frac{1}{4} \alpha^2 \sin 2\omega \right\} + \ldots$$

und schliesslich

$$t = \frac{b l}{K} \ldots \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \, arc \cos \frac{\theta}{\alpha} + \frac{1}{2} \ldots \right)$$

Die Dauer eines Hinganges von A bis ...

$$t_1 = \frac{\pi b}{2} \sqrt{\frac{b}{k m}} \ldots$$

und die einer ganzen Schwingung da-

IV. Ein einfaches Pendel von

lich die Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{2g \ldots}$$

... untersu...

Hieraus folgt, dass

... eit r und der Zeit t vo

sein muss, wenn seine ... Geschwindigkeit von t;

rade so aussehen soll ... der ganzen Bahn nöthige Zeit T;

tes. Für kleine Aus ... rollenden Punkte ausgeübte Druck D.

constant, nämlich ... Indem man r als unabhängige Veränderliche benutzt.

... das Bogendifferential der Bahn

$$d s = \frac{a}{r} d r.$$

Aufga'

Ferner für den Winkel ψ zwischen Leitstrahl und Normale

ist ein ...

indire

zoge

der

ei

$$\psi = arc \tan \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} = arc \cos \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = arc \sin \frac{r}{a}.$$

Endlich für den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = a \frac{r \sqrt{a^2 - r^2}}{a^2 - 2 r^2}.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man leicht Folgendes: 1) Für $\theta = 0$ ist $r = a$. Mit wachsenden Anomalien werden die Radienvectoren immer kleiner, gehen aber erst für $\theta = \infty$ in Null über. Der Coordinatenanfang O ist mithin ein asymptotischer Punkt der Curve. 2) Zwischen $r = a$ und $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist die Letztere convex zur Achse OA;

bei

$$r = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

·kt und läuft von diesem aus mit stets concaver
· dieses Inflexionspunktes ist

$$1 - \frac{\pi}{4}.$$

· gefunden werden, weil $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$
· a gebildeten gleichschenklig-
·nkel 1, d. i. $57^0\ 17'\ 44{,}8''$,

..er der Punkt rollt, er-
..n Lösungen eingeschlagenen

$$= a b \sqrt{\frac{a-r}{r}},$$

·g

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2kM}{a}} = b$$

rden ist.

ach wächst v immer, wird aber erst für $r = 0$ (also für $\theta = \infty$)

ır Erreichung der Stelle r nöthige Zeit ergiebt sich zu

$$t = \frac{1}{b} \arccos \frac{2r - a}{a}.$$

Ian hat daher umgekehrt

$$r = a \cos^2 (\tfrac{1}{2} b t)$$

$$v = a b \tan (\tfrac{1}{2} b t).$$

ıum Durchlaufen der ganzen Bahn bedarf es keiner unend-
ı Zeit, sondern der endlichen

$$T = \frac{\pi}{b}.$$

ər von dem rollenden Punkte ausgeübte Druck D setzt sich
aus der Normalkraft

$$N = \tfrac{1}{2} a^2 b^2 \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2}$$

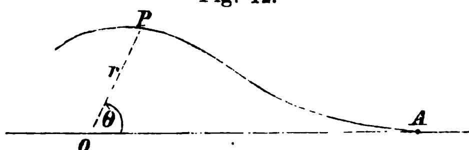
ır Centrifugalkraft

Aufgabe 126. Die Tractorie des Kreises, nämlich die Curve

$$\theta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - arc\,cos\,\frac{r}{a},$$

bildet die vorgeschriebene feste Bahn eines Punktes. Seine Bewegung beginnt in A (Fig. 12) vom Ruhezustande aus. Sie wird hervorgerufen durch die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgende Anziehung einer im Coordinatenanfange O befindlichen Masse M. Ermittelt soll werden

Fig. 12.



I. die Curvennatur, so weit deren Kenntniss für die Untersuchung der Bewegung nöthig ist;

II. die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v und der Zeit t vom Leitstrahle r;

III. die des letzteren und der Geschwindigkeit von t;

IV. die zum Durchlaufen der ganzen Bahn nöthige Zeit T;

V. der von dem rollenden Punkte ausgeübte Druck D.

Lösung. I. Indem man r als unabhängige Veränderliche benutzt, findet man für das Bogendifferential der Bahn

$$ds = \frac{a}{r}\,dr.$$

Ferner für den Winkel ψ zwischen Leitstrahl und Normale

$$\psi = arc\,tan\,\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} = arc\,cos\,\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = arc\,sin\,\frac{r}{a}.$$

Endlich für den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = a\,\frac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{a^2 - 2\,r^2}.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man leicht Folgendes: 1) Für $\theta = 0$ ist $r = a$. Mit wachsenden Anomalien werden die Radienvectoren immer kleiner, gehen aber erst für $\theta = \infty$ in Null über. Der Coordinatenanfang O ist mithin ein asymptotischer Punkt der Curve. 2) Zwischen $r = a$ und $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist die Letztere convex zur Achse OA; bei

$$r = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

hat sie einen Wendepunkt und läuft von diesem aus mit stets concaver Krümmung. Die Anomalie dieses Inflexionspunktes ist

$$\theta = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Er kann leicht durch Construction gefunden werden, weil $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$ die halbe Hypotenuse eines aus der Kathete a gebildeten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist und weil der Winkel 1, d. i. $57^0\ 17'\ 44{,}8''$, sehr nahe den Tangentenwerth $\frac{95}{61}$ besitzt.

II. Für die Geschwindigkeit v, mit welcher der Punkt rollt, ergiebt sich auf dem bei den vorhergehenden Lösungen eingeschlagenen Wege

$$v = a b \sqrt{\frac{a-r}{r}},$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2kM}{a}} = b$$

gesetzt worden ist.

Hiernach wächst v immer, wird aber erst für $r = 0$ (also für $\theta = \infty$) zu ∞.

Die zur Erreichung der Stelle r nöthige Zeit ergiebt sich zu

$$t = \frac{1}{b} \arccos \frac{2r-a}{a}.$$

III. Man hat daher umgekehrt

$$r = a \cos^2 (\tfrac{1}{2} b t)$$

und

$$v = a b \tan (\tfrac{1}{2} b t).$$

IV. Zum Durchlaufen der ganzen Bahn bedarf es keiner unendlich langen Zeit, sondern der endlichen

$$T = \frac{\pi}{b}.$$

V. Der von dem rollenden Punkte ausgeübte Druck D setzt sich zusammen aus der Normalkraft

$$N = \frac{1}{2} a^2 b^2 \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2}$$

und aus der Centrifugalkraft

$$C = ab' \frac{a^2 - 2r^2}{r^2} \sqrt{\frac{a-r}{a+r}}.$$

Die Erstere ist stets nach innen gerichtet.

Die Letztere wirkt vor dem Wendepunkte nach innen, hinter demselben nach aussen.

Beide zusammen liefern

$$D = \frac{1}{2} a b^2 \frac{4r^2 + ar - a^2}{r^2} \sqrt{\frac{a-r}{a+r}}.$$

Der am Inflexionspunkte herrschende Druck hat hiernach den Werth $\frac{1}{2} a b^2 \sqrt{2}$.

Aufgabe 127. Ein Punkt, welcher die feste Curve

$$r = f(\theta)$$

nicht verlassen kann, wird dem Newton'schen Gesetze entsprechend nach dem Coordinatenanfange derartig angezogen, dass diese Attraction für die Einheit der Entfernung den Werth k besitzt. Er beginnt seine Bewegung vom Ruhezustande aus an derjenigen Stelle der Bahn, welcher der Leitstrahl b zukommt.

Man soll die Geschwindigkeit v bestimmen, die der Punkt an dem allgemeinen Orte θr hat; die Zeit t, welche er braucht, um bis dahin zu laufen und den Druck D, welchen die Curve an dieser Stelle erleidet.

Lösung. Für die Geschwindigkeit findet man

$$v = \pm \sqrt{\frac{2k}{b} \cdot \frac{b-r}{r}},$$

wonach ihre Natur leicht übersehen werden kann.

Für die Laufzeit ergiebt sich

$$t = \sqrt{\frac{b}{2k}} \int \sqrt{\frac{r(r^2 + r'^2)}{b-r}}\, d\theta + Const.$$

Hierbei ist, wie immer, $r' = \frac{dr}{d\theta}$, so dass man, wegen $r = f(\theta)$, in jedem speciellen Falle entweder Alles durch r, oder Alles durch θ ausdrücken und nachher zur Bestimmung des Integralwerthes schreiten kann. Die Constante ergiebt sich dabei aus der Bedingung, dass $t = 0$ sein muss, wenn $r = b$ ist.

Der von der Bahn erlittene Druck D setzt sich zusammen aus der Centrifugalkraft

$$C = \frac{2k}{b} \cdot \frac{(b-r)(r^2+2r'^2-rr'')}{r(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wobei $r'' = \frac{dr'}{d\theta}$, und der Normalkraft

$$N = -\frac{k}{r\sqrt{r^2+r'^2}}.$$

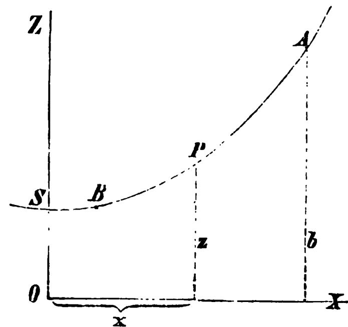
B. Bewegung auf einer ebenen festen Linie mit Widerstand.

Aufgabe 128. Auf der starren Bahn

$$z = f(x)$$

rollt ein Punkt unter dem Einflusse seiner Schwere und eines constanten Widerstandes W herab, welcher immer in der Richtung der Curventangente thätig ist. Die Bewegung beginnt mit der Geschwindigkeit c in A (Fig. 13), dessen Ordinate gleich b ist.

Fig. 13.



Man soll berechnen:

I. welche Geschwindigkeit v der Punkt besitzt, nach dem Herabrollen bis zu derjenigen allgemeinen Stelle, der die Ordinate z zukommt;

II. wie gross diese Geschwindigkeit ist, wenn die gemeine Kettenlinie

$$z = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

als Bahn vorliegt; mit welcher Schnelligkeit v_k der Scheitel durchlaufen wird und wo — in der abwärts gehenden Bahn — die grösste Geschwindigkeit herrscht.

Lösung. I. Die für die Tangentialkraft geltenden Ausdrücke führen zu der Differentialgleichung

$$v\,dv = W\,ds - g\,dz,$$

in welcher s den Bogen SP bedeutet.

Durch Integration folgt hieraus

$$v = \sqrt{2\,(Ws - gz) + Const.}$$

Dabei ergiebt sich die Constante aus der Bedingung, dass für $z = b$ $v = c$ sein muss.

II. Für die gemeine Kettenlinie erhält man

$$v = \sqrt{c^2 + 2g(b - z) - 2W(\sqrt{b^2 - k^2} - \sqrt{z^2 - k^2})}.$$

Wenn $W = 0$ ist, so nimmt diess die bekannte Form (Lösung der Aufg. 101)

$$v = \sqrt{c^2 + 2g(b - z)}$$

an. Es drückt daher $2W(\sqrt{b^2 - k^2} - \sqrt{z^2 - k^2})$ den Verlust aus, welchen das Quadrat der Geschwindigkeit v durch den Widerstand W erleidet.

Der Scheitel wird mit

$$v_k = \sqrt{c^2 + 2g(b - k) - 2W\sqrt{b^2 - k^2}}$$

durchlaufen.

Die grösste Geschwindigkeit herrscht an der leicht construirbaren Stelle

$$z = \frac{gk}{\sqrt{g^2 - W^2}},$$

welche nur für $W = 0$ die tiefste ist.

Aufgabe 129. Wie 128, doch rollt der Punkt aufwärts von einer Stelle B aus, deren z gleich h ist. Man soll bestimmen

I. welche Geschwindigkeit v er nach dem Ersteigen des Curvenpunktes z besitzt;

II. wie gross dieselbe ist, wenn die Bewegung im Scheitel der gemeinen Kettenlinie beginnt;

III. bis zu welchem Orte z_1 in diesem Falle das Aufsteigen erfolgt.

Lösung. Es ergiebt sich

I. $$v^2 = Const. - 2(gz + Ws).$$

II. $$v^2 = c^2 - 2g(z - k) - 2W\sqrt{z^2 - k^2}.$$

III. Für einen von g verschiedenen Widerstand:

$$z_1 = \frac{1}{2(g^2 - W^2)}\left\{g(c^2 + 2gk) - W\sqrt{c^4 + 4c^2gk + 4k^2W^2}\right\};$$

hingegen für $W = g$:

$$z_1 = \frac{k}{2} + \frac{c^2}{4g} + \frac{gk^2}{c^2 + 2gk}.$$

Aufgabe 130. Die Bewegung des Punktes erfolgt auf der starren Curve

$$x = f(z).$$

Ausser der Schwere g ist ein Widerstand thätig, welcher in demelben Verhältnisse wächst, wie die Geschwindigkeit v und für $v = 1$ len Werth k besitzt.

I. Die Differentialgleichung der Bewegung soll sowohl für das [erab- als auch für das Hinaufrollen bestimmt werden.

II. Besonderer Fall: Die Bahn ist eine gemeine Cycloide, de-n Scheitel mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt und deren asis der x-Achse parallel im Abstande $2a$ liegt. Der Punkt beginnt in Aufsteigen mit der Geschwindigkeit c im Scheitel der Curve. Unter r Voraussetzung $k > \sqrt{\frac{g}{a}}$ soll man berechnen

die Beziehung zwischen v und der Bahnlänge s (letztere von der z-Achse aus gezählt),

den ganzen von dem aufsteigenden Punkte durchlaufenen Bogen S.

Lösung. I. Für das Herabrollen lautet die Differentialgleichung er Bewegung

$$v\,dv = kv\,ds - g\,dz;$$

ir das Hinauflaufen hingegen

$$v\,dv = -kv\,ds - g\,dz.$$

II. Die letzte dieser Gleichungen geht für die gemeine Cycloide ber in

$$v\,dv = -kv\,ds - \frac{g}{4a} s\,ds.$$

Hieraus folgt durch Integration und wenn man zur Abkürzung $\sqrt{\frac{a}{ak^2 - g}}$ mit n bezeichnet,

$$\frac{gs^2 + 4akvs + 4av^2}{4ac^2} = \left[\frac{k(n-1)s + 2nv}{k(n+1)s + 2nv}\right]^n$$

Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der durchlaufenen hn.

Die ganze von dem aufsteigenden Punkte zurückgelegte Curvenge ist mithin

$$S = 2c\sqrt{\frac{a}{g}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n}.$$

Aufgabe 131. Auf einer Curve, für welche der von der z-Achse aus gezählte Bogen immer das k-fache des natürlichen Logarithmus der Ordinate ist ($s = klz$), bewegt sich ein Punkt abwärts. Er unterliegt seiner Schwere und einem Widerstande gleich $\frac{C}{2}v^2$, also dem Quadrate der Bahngeschwindigkeit proportional. Die Bewegung beginnt an derjenigen Curvenstelle, deren z den Werth b hat, mit der Geschwindigkeit c. Man soll für den zwischen den positiven Hälften der Coordinatenachsen liegenden Bahntheil berechnen:

I. wie gross v an der allgemeinen Stelle z ist;

II. wo es seinen grössten Werth erreicht;

III. mit welcher Geschwindigkeit u der Punkt in der Ordinatenachse anlangt.

Lösung. I. Als Differentialgleichung der Bewegung ergiebt sich

$$Ckv^2 \frac{1}{z} dz - 2v dv = 2g dz.$$

Multiplicirt man dieselbe mit z^{-Ck}, so wird die linke Seite ein vollständiges Differential und man kommt auf

$$v^2 = -2gz^{Ck}\int z^{-Ck} dz.$$

Für $Ck \gtrless 1$ liefert diess

$$v^2 = z^{Ck} \left\{ \frac{2g}{Ck-1} (z^{1-Ck} - b^{1-Ck}) + c^2 b^{-Ck} \right\};$$

für $Ck = 1$ hingegen

$$v^2 = z\left(\frac{c^2}{b} - 2gl\frac{z}{b}\right).$$

II. Im ersten Falle ist

$$z_1 = \left\{ \frac{2gb^{Ck}}{[2gb - c^2(Ck-1)]\,Ck} \right\}^{\frac{1}{Ck-1}}$$

diejenige Stelle, an welcher der Punkt am schnellsten läuft; im zweiten

$$z_1 = be^{\frac{c^2-2gb}{2gb}}.$$

III. Die Ordinatenachse wird mit den Geschwindigkeitsquadraten

$$u^2 = \frac{2g}{Ck-1}(1 - b^{1-Ck}) + c^2 b^{-Ck},$$

bezüglich

$$u^2 = \frac{c^2}{b} + 2glb,$$

erreicht.

Aufgabe 132. Von der Stelle A der gemeinen Cycloide APO aus rollt ein Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit in Folge seiner Schwere herab. Er erleidet einen Widerstand, welcher wie das Quadrat der Geschwindigkeit v wächst und für $v = 1$ den Werth $\frac{C}{2}$ hat.

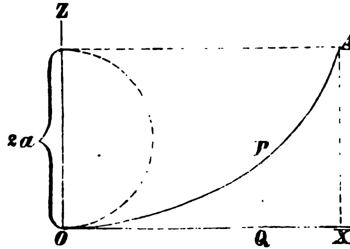


Fig. 14.

Mit welcher Schnelligkeit läuft der Punkt an der durch die Ordinate $QP = z$ oder durch die Bahnlänge $OP = s$ bestimmten allgemeinen Stelle?

Lösung. Die sich ergebende Differentialgleichung der Bewegung, nämlich

$$C\sqrt{2a}\,\frac{v^2}{\sqrt{z}}\,dz - 2v\,dv = 2g\,dz,$$

lässt sich auf dem bei der vorigen Lösung angegebenen Wege integriren und liefert

$$v^2 = -\,e^{2C\sqrt{2az}}\left(2g\int e^{-2C\sqrt{2az}}dz + B\right)$$

oder, was dasselbe ist,

$$v^2 = -\,e^{Cs}\left(\frac{g}{2a}\int e^{-Cs}s\,ds + B\right).$$

Diess führt zu

$$v = \frac{\sqrt{g}\,e^{C\sqrt{2az}}}{C\sqrt{2a}}\sqrt{(1 + 2C\sqrt{2az})\,e^{-2C\sqrt{2az}} - (1 + 4aC)\,e^{-4aC}},$$

worin wieder $2\sqrt{2az}$ durch s ersetzt werden kann.

Aufgabe 133. Die vorgeschriebene Bahn ist die allgemeine Curve

$$z = f(x).$$

Es wirken die in der vorigen Aufgabe bezeichneten Kräfte, nämlich die Schwere und der Widerstand $\frac{C}{2}v^2$. Die Ordinate von A (Fig. 13) ist b, und es beginnt daselbst die Bewegung mit der Geschwindigkeit c.

I. Mit welcher Schnelligkeit v durchläuft der herabrollende Pu[nkt] die allgemeine Bahnstelle xz?

II. Nach welcher Zeit t langt er daselbst an?

III. Was liefert die unter I. für v gefundene Gleichung in d[em] speciellen Falle, in welchem der vorgeschriebene Weg S [...] eine gerade Linie ist, die die x-Achse im Coordinaten[an]fange O unter dem spitzen Winkel α schneidet und wenn [die] Bewegung in A vom Ruhezustande aus beginnt?

Lösung. I. Auf die in den vorhergehenden Lösungen angeführ[te] Weise gelangt man zu

$$v^2 = e^{Cs}\left(B_1 - 2g\int e^{-Cs}\,dz\right).$$

In jedem besonderen Falle ist s (nämlich SP) durch z, oder [z] durch s auszudrücken und die Integration auszuführen. Die Constant[e] B_1 bestimmt sich hierbei aus der Bedingung, dass für $z = b$ ode[r] $s = SPA$ die Geschwindigkeit $v = c$ sein muss.

II. Als absoluter Werth der Laufzeit folgt

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{e^{Cs}\left(B_1 - 2g\int e^{-Cs}\,dz\right)}} + B_2,$$

wobei B_2 aus der Gleichzeitigkeit von $t = 0$, $z = b$ und $s = SPA$ her zuleiten ist.

III. Wendet man die obige für v gefundene Gleichung auf de[n] bezeichneten speciellen Fall an, so ergiebt sich

$$v^2 = \frac{2g\sin\alpha}{C}\left(1 - e^{-C(b-z)\csc\alpha}\right)$$

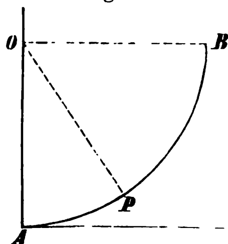
oder, wenn mit s_1 die durchlaufene Strecke bezeichnet wird,

$$v^2 = \frac{2g\sin\alpha}{C}\left(1 - e^{-Cs_1}\right).$$

Diess stimmt mit dem unter Nr. 32 Gefundenen überein.

Aufgabe 134. Von der tiefsten Stelle A eines um O (Fig. 15) construirten Viertelkreises aus, bewegt sich ein Punkt mit der An-

Fig. 15.



fangsgeschwindigkeit c aufwärts. Er unterlieg[t] seiner Schwere, der Reibung und dem Luftwiderstande. Letzterer ist dem Quadrate de[r] Geschwindigkeit v proportional und hat für $v =$ [1] den Werth k. Die Reibung ist das b-fache de[s] Normaldruckes, b also der sogenannte Reibung[s]coefficient. Der Kreis hat den Halbmesser a. Man soll berechnen

I. welche Geschwindigkeit v der Punkt besitzen wird, wenn er den Bogen AP, dessen Centriwinkel θ ist, durchlaufen hat;

II. mit welcher Anfangsgeschwindigkeit c_1 er von A ausgehen müsste, wenn er sich bis genau an die Stelle B erheben sollte, welche am Ende des horizontalen Radius liegt.

Lösung. I. Mit Benutzung der Substitutionen

$$v^2 = u,$$
$$2(ak + b) = \alpha,$$
$$2ag = \beta,$$
$$2abg = \gamma,$$

kommt man auf

$$\frac{du}{d\theta} + \alpha u + \beta \sin\theta + \gamma \cos\theta = 0$$

als Differentialgleichung der Bewegung.

Die auf bekannte Weise ausführbare Integration derselben giebt

$$v^2 = (c^2 + B)\, e^{-\alpha\theta} - (A \sin\theta + B \cos\theta),$$

wobei

$$A = \frac{\alpha\beta + \gamma}{1 + \alpha^2}$$

und

$$B = \frac{\alpha\gamma - \beta}{1 + \alpha^2}.$$

II. Hieraus folgt, dass

$$c_1 = \sqrt{A e^{\frac{\alpha\pi}{2}} - B}$$

diejenige Anfangsgeschwindigkeit ist, welche vorliegen muss, wenn der ganze Quadrant durchlaufen werden soll.

Wenn Reibung und Luftwiderstand verschwinden, so liefert diess das bekannte $c_1 = \sqrt{2ag}$.

II. Bewegung auf einer vorgeschriebenen festen Fläche.

Aufgabe 135. Ein Punkt, der sich nur auf der starren Fläche

$$z = f(x, y)$$

bewegen kann, wird beeinflusst von beschleunigenden Kräften, welche sich zu einer Resultante zusammensetzen, die parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems in die Componenten

$$X = \varphi_1(x),$$
$$Y = \varphi_2(y),$$
$$Z = \varphi_3(z)$$

zerlegbar ist.

Man soll angeben

I. wie sich die Geschwindigkeit v als Function von x und y bestimmen lässt;

II. wie man die Coordinaten x, y und z durch die Zeit t ausdrücken kann;

III. auf welche Weise sich die Bahngleichungen herleiten lassen;

IV. wie man den Druck D, welchen die Fläche erleidet, zu finden vermag.

Lösung. I. Denkt man sich, um den Punkt als einen freien auffassen zu können, den Widerstand, welchen die Fläche leistet, durch eine Kraft N ersetzt, die in der Richtung der Normale wirkt und bezeichnet man die von der letzteren mit den Coordinatenachsen gebildeten Winkel mit ν_x, ν_y, ν_z, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \nu_x,$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \nu_y,$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \nu_z.$$

Sie gehen bei Einführung der Cosinuswerthe und Benutzung der Abkürzung

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

über in

$$1) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = X - NQ \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$2) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y - NQ \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$3) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + NQ.$$

Mit Beachtung von

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

folgt hieraus

$$4)\qquad v^2 = 2\int X dx + Y dy + Z dz.$$

Da X, Y, Z als Functionen von bezüglich x, y, z gegeben sind und $z = f(x, y)$ ist, so liefert diese Gleichung die Geschwindigkeit v ausgedrückt durch x und y, wenn man die Integration vornimmt und dabei die Constante aus irgend einem als gegeben vorliegenden Bewegungszustande (gewöhnlich dem anfänglichen) bestimmt.

II. Um die Coordinaten x, y, z durch t ausdrücken zu können, braucht man drei Gleichungen, in denen nur diese vier Veränderlichen vorkommen. Eine dieser Gleichungen ist die der Fläche, nämlich $z = f(x, y)$; die beiden anderen lassen sich aus 1), 2) und 3) herleiten, indem man N eliminirt.

III. Wenn x, y, z als Functionen von t bestimmt sind, so ergeben sich, durch Wegschaffung von t, Gleichungen zwischen x und y, x und z, y und z; diess sind die der Projectionen der Bahn.

IV. Endlich kann eine der Gleichungen 1), 2), 3), oder eine Verbindung derselben, dazu dienen, die Normalkraft N zu finden. Hiermit hat man dann auch den senkrechten Druck D, welchen die Fläche erleidet, denn er ist N gleich, nur entgegengesetzt gerichtet.

Ob und in welcher Weise die hier angedeuteten Operationen ausführbar sind, ist Sache des speciellen Falles.

Aufgabe 136. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen xy-Ebene horizontal und dessen z-Achse im Sinne der Schwere gerichtet liegt, ist eine Ebene gegeben, welche die y-Achse in sich enthält. Auf derselben befindet sich ein Punkt, der nur seiner Schwere unterliegt. Er beginnt seine Bewegung im Coordinatenanfange mit einer Geschwindigkeit c, deren Richtung mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet. Die Neigung der vorgeschriebenen Ebene unter den Horizont beträgt λ Grad (wobei bekanntlich λ mit den vorhergenannten Winkeln zusammenhängt). Man soll berechnen

I. die Geschwindigkeit v, welche der Punkt an der allgemeinen Stelle seiner Bahn besitzt;

II. v und die Coordinaten x, y, z seines Ortes als Functionen der Zeit t;

III. die Gleichungen der auf die drei Coordinatenebenen bezogenen Projectionen der Bahn;

IV. den Druck D, welchen die Ebene erleidet.

Lösung. I. Nach Anleitung der vorhergehenden Lösung findet man als Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - N \sin \lambda,$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = g + N \cos \lambda.$$

Aus denselben folgt

$$v = \sqrt{c^2 + 2 g z},$$

was einen sehr bekannten Satz ausspricht.

II. Zur Zeit t befindet sich der Punkt an dem durch die Coordinaten

$$x = \tfrac{1}{4} g t^2 \sin 2\lambda + c t \cos \alpha,$$
$$y = c t \cos \beta,$$
$$z = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin^2 \lambda + c t \cos \gamma$$

bestimmten Orte und besitzt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{c^2 + 2 g \left(\tfrac{1}{2} g t^2 \sin^2 \lambda + c t \cos \gamma\right)}.$$

III. Als Gleichung der xy-Projection der Bahn ergiebt sich zunächst

$$2 c^2 x \cos^2 \beta = g y^2 \sin \lambda \cos \lambda + 2 c^2 y \cos \alpha \cos \beta,$$

was leicht auf die Form

$$\left(y + \frac{c^2 \cos \alpha \cos \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda}\right)^2 = 2 \frac{c^2 \cos^2 \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda} \left(x + \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{2 g \sin \lambda \cos \lambda}\right)$$

gebracht werden kann. Man sieht hieraus, dass diese Projection eine gemeine Parabel ist, deren Achse parallel zur x-Achse liegt, deren Halbparameter

$$p = \frac{c^2 \cos^2 \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda}$$

ist und deren Scheitel um

$$A = \frac{c^2 \cos \alpha \cos \beta}{g \sin \lambda \cos \lambda}$$

von der Achse der x, hingegen um

$$B = \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{2 g \sin \lambda \cos \lambda}$$

von der der y absteht.

Ganz ebenso ergiebt sich für die yz-Projection

$$\left(y+\frac{c^2\cos\alpha\cos\beta}{g\sin\lambda\cos\lambda}\right)^2=2\,\frac{c^2\cos^2\beta}{g\sin^2\lambda}\left(z+\frac{c^2\cos^2\alpha}{2g\cos^2\lambda}\right),$$

woraus die entsprechend gleichen Schlüsse folgen.

Die xz-Projection der Bahn fällt mit der gleichnamigen Spur der vorgeschriebenen Ebene zusammen; ihre Gleichung ist daher

$$z=x\tan\lambda.$$

IV. Der von dem Punkte ausgeübte Druck hat die Grösse

$$D=g\cos\lambda.$$

Aufgabe 137. Auf einem Rotationsparaboloide von der Gleichung

$$z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$$

soll sich ein Punkt derartig bewegen, dass er auf die Fläche überall den constanten Druck k ausübt und — der Zeit t proportional — immer gleich weit von der yz- wie von der xz-Ebene entfernt ist.

Man soll nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 135 bestimmen, welcher Art die Kräfte X, Y, Z sein müssen, die ihn in den Richtungen der positiven Coordinaten antreiben; ferner mit welcher Geschwindigkeit v er läuft, wenn die Bewegung mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c im Coordinatenanfange beginnt; endlich wie seine Bahn beschaffen ist.

Lösung. Die Natur der die Bewegung erzeugenden Kräfte wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$X=\frac{kx}{\sqrt{a^2+2x^2}}=\frac{kbt}{\sqrt{a^2+2b^2t^2}},$$

$$Y=X,$$

$$Z=\frac{2b^2}{a}-k\sqrt{\frac{a}{a+2z}}=\frac{2b^2}{a}-\frac{ak}{\sqrt{a^2+2b^2t^2}},$$

die sich leicht auf noch andere Formen bringen lassen und in denen b diejenige Strecke bezeichnet, um welche sich der Punkt zur Zeit 1 von der yz-Ebene entfernt hat.

Die Geschwindigkeit des Letzteren ergiebt sich zu

$$v=\frac{1}{a}\sqrt{4b^2x^2+a^2c^2}=\frac{1}{a}\sqrt{4b^4t^2+a^2c^2}.$$

Die Bahn ist der von den beiden verticalen Coordinatenebenen gleich weit abstehende Meridian des Umdrehungsparaboloids.

III Bewegung auf einer vorgeschriebenen festen Linie im

Aufgabe 138. Auf einer starren Curve, welche die Durchs linie der Flächen

1) $$F_1(x, y, z) = 0$$

und

2) $$F_2(x, y, z) = 0$$

ist, bewegt sich ein Punkt in Folge von beliebig vielen Kräft parallel zu den Achsen des rechtwinkligen Coordinatensystems d ponenten X, Y, Z liefern, welche Functionen von x, y, z sind

Die Bewegung beginnt zur Zeit Null mit der Anfangsgesch keit v_0 in einem Punkte, dessen Coordinaten die Werthe a, l haben.

Es soll angegeben werden, auf welche Weise man die x, y Punktes, ferner seine Geschwindigkeit v, endlich den auf di ausgeübten Druck und dessen Richtungswinkel gegen die drei natenachsen als Functionen der Zeit t bestimmen kann.

Lösung. Um den beweglichen Punkt als einen freien zu können, denkt man sich den Widerstand, welchen die starı leistet, durch eine Normalkraft N ersetzt, die mit den drei Coord achsen die Winkel λ, μ, ν einschliesst. Dann lauten die Diffe gleichungen der Bewegung

3) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos\lambda,$$

4) $$\frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos\mu,$$

5) $$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos\nu.$$

Werden ferner die Winkel, welche die Tangente im Punk mit den drei Achsen bildet, durch ζ, η, θ bezeichnet, so hat ma

$$\cos\lambda \cos\zeta + \cos\mu \cos\eta + \cos\nu \cos\theta = 0$$

oder

6) $$\cos\lambda \frac{dx}{ds} + \cos\mu \frac{dy}{ds} + \cos\nu \frac{dz}{ds} = 0,$$

wobei ds das Bogenelement.

Endlich ist

7) $$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Zwischen den acht Grössen x, y, z, λ, μ, ν, N und t bestehen also sieben Gleichungen. Mittelst derselben können die Coordinaten x, y, z, die Geschwindigkeit v, der Druck auf die Bahn und seine Richtungswinkel als Functionen der Zeit t bestimmt werden.

Zunächst ergiebt sich aus 3), 4) und 5)

$$8) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz = X dx + Y dy + Z dz,$$

hieraus aber, bei Beachtung von

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

die Gleichung

$$9) \qquad v dv = X dx + Y dy + Z dz.$$

Da nun X, Y, Z von x, y, z abhängen, x und y aber sich mittelst 1) und 2) als Functionen von z darstellen lassen (wenn, wie vorausgesetzt werden möge, die betreffenden Umformungen der vorliegenden Gleichungen möglich sind), so erhält man hieraus

$$v dv = F_3(z)\, dz$$

und endlich

$$10) \qquad v = F_4(z) + Const.,$$

wobei die Constante sich aus der Bedingung ergiebt, dass v gleich v_0 sein muss, wenn z den Werth c hat.

Da nun ferner

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

ist, x und y aber ausdrückbar sind durch z, so giebt diess, verbunden mit 10), eine Gleichung von der Form

$$11) \qquad z = F_5(t).$$

Hat man aber z als Function der Zeit, so hat man [nach 1) und 2)] auch x und y als solche; desgleichen [nach 10)] die Geschwindigkeit v.

Was endlich den von der Bahn auszuhaltenden Druck anlangt, so ist derselbe gleich dem Widerstande N. Für Letzteren aber folgt aus 3) bis 5) unter Beachtung von 7),

$$12) \qquad N = \pm \sqrt{(x'' - X)^2 + (y'' - Y)^2 + (z'' - Z)^2},$$

wobei $x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}$, $z'' = \frac{d^2 z}{dt^2}$.

Auch liefern 3), 4) und 5) die Richtungswinkel des Druckes, nämlich

$$13) \quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{x'' - X}{N}, \\ \cos\mu = \dfrac{y'' - Y}{N}, \\ \cos\nu = \dfrac{z'' - Z}{N}. \end{cases}$$

Da man nun, nach dem Vorhergehenden, x, y, z, X, Y, Z durch t ausdrücken kann, so sind hiermit auch N, λ, μ und ν als Functionen der Zeit bestimmt.

Die weitere Ausführung des hier Angegebenen ist selbstverständlich Sache des besonderen Falles.

Aufgabe 139. Eine Gerade, welche durch den Coordinatenanfang eines rechtwinkligen Systems geht, liegt derartig, dass ihre Horizontalprojection mit der x-Achse den Winkel α, ihre Verticalprojection mit derselben Achse den Winkel β bildet. Auf dieser Geraden ist ein Punkt beweglich, welcher in den Richtungen der positiven x-, y- und z-Achse von den constanten Kräften A, B, C beeinflusst wird. Er beginnt seine Bewegung im Coordinatenanfange vom Ruhezustande aus. Man soll (nach Anleitung der Lösung der vorhergehenden Aufgabe) berechnen:

I. welche Geschwindigkeit v der Punkt besitzt, nachdem er die Höhe z erstiegen oder nachdem er die Entfernung x von der yz-Ebene erlangt hat;

II. welches die Coordinaten seines Ortes zur Zeit t sind;

III. mit welcher Geschwindigkeit er in diesem Augenblicke läuft;

IV. welchen Druck D die geradlinige Bahn zur Zeit t erleidet;

V. wie sich die unter I) bis IV) gefundenen Resultate vereinfachen, wenn die Bahn mit der x-Achse zusammenfällt.

Lösung. I. Für die gesuchte Geschwindigkeit findet man

$$v = \sqrt{2Lz\cot\beta} = \sqrt{2Lx},$$

wobei zur Abkürzung

$$A + B\tan\alpha + C\tan\beta = L$$

gesetzt wurde.

Dieselbe ist also proportional der Quadratwurzel der erstiegenen Höhe und auch der der Entfernung von der yz-Ebene.

II. Die Coordinaten des Ortes sind, wenn man

$$1 + tan^2\alpha + tan^2\beta = M$$

setzt und t vom Beginne der Bewegung an rechnet,

$$x = \tfrac{1}{2}\frac{L}{M}t^2,$$

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{L}{M}t^2 \tan\alpha,$$

$$z = \tfrac{1}{2}\frac{L}{M}t^2 \tan\beta,$$

wachsen mithin wie die Quadrate der Zeiten.

III. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt läuft, nimmt hingegen zu wie die erste Potenz; es ist nämlich

$$v = \frac{L}{\sqrt{M}}t.$$

IV. Der von der Bahn auszuhaltende Druck besitzt den Werth

$$D = \sqrt{\frac{(A\tan\alpha - B)^2 + (A\tan\beta - C)^2 + (C\tan\alpha - B\tan\beta)^2}{M}},$$

hat also beständige Grösse — was übrigens auch ohne Rechnung sich sofort übersehen lässt.

Seine Richtungswinkel λ, μ und ν sind bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{L - AM}{MN},$$

$$\cos\mu = \frac{L\tan\alpha - BM}{MN},$$

$$\cos\nu = \frac{L\tan\beta - CM}{MN},$$

in welchen Gleichungen N den von der Bahn geleisteten Widerstand bedeutet, der D gleich ist, aber entgegengesetzt gerichtet.

V. Für den in der Aufgabe genannten besonderen Fall liefern die unter I) bis IV) stehenden Formeln

$$v = \sqrt{2Ax},$$

$$x = \tfrac{1}{2}At^2$$

nebst den selbstverständlichen Werthen $y = 0$, $z = 0$.

Ferner

$$v = At$$

und endlich

$$D = \sqrt{B^2 + C^2}.$$

Diese Resultate sind, als giltig für die Bewegung in einer Geraden unter alleinigem Einflusse einer constanten Kraft A, allgemein bekannt.

Aufgabe 140. Unter der alleinigen Wirkung der Schwere rollt auf einer Schraubenlinie, deren Achse senkrecht steht, ein Punkt herab. Die Bewegung beginnt ohne Anfangsgeschwindigkeit. Der Steigungswinkel der Schraubenlinie ist α, der Halbmesser derselben gleich a. Sie wird auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen z-Achse vertical nach unten gerichtet ist und von dessen x-Achse aus die Bewegung erfolgt.

Man soll für den rollenden Punkt die Geschwindigkeit v, die Ortscoordinaten x, y, z, den auf die Bahn ausgeübten Druck D und dessen Richtungswinkel λ, μ, ν nach Anleitung der Lösung der Aufgabe 138 als Functionen der Zeit t bestimmen.

Lösung. Ohne Schwierigkeit gelangt man (die Zeit vom Bewegungsbeginne an rechnend) zu den sehr einfache Gesetze aussprechenden Gleichungen

$$v = gt \sin\alpha,$$
$$z = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin^2\alpha.$$

Ferner zu den zusammengesetzteren Werthen

$$y = a \sin\frac{gt^2 \sin 2\alpha}{4a},$$
$$x = a \cos\frac{gt^2 \sin 2\alpha}{4a}.$$

Endlich ergiebt sich der absolute Werth des von der Schraubenlinie auszuhaltenden Druckes zu

$$D = \frac{g\cos\alpha}{a}\sqrt{a^2 + (g^2 \sin^4\alpha \cos^2\alpha) t^4};$$

für seine Richtungswinkel aber

$$\cos\lambda = \frac{x''}{N}, \quad \cos\mu = \frac{y''}{N}, \quad \cos\nu = \frac{z'' - g}{N},$$

in welchen Ausdrücken N dem D gleich ist, doch entgegengesetzt gerichtet, x'', y'' und z'' aber der Reihe nach die Werthe

$$-2ak(2kt^2 \cos kt^2 + \sin kt^2),$$
$$-2ak(2kt^2 \sin kt^2 - \cos kt^2),$$
$$g \sin^2 \alpha$$

haben, wobei k die Abkürzung für $\frac{g \sin 2\alpha}{4a}$ bedeutet.

Anmerkung. Zu denselben Resultaten kann man auch leicht kommen, ohne von der Gleichung 9) der zu Nr. 138 gehörenden Lösung auszugehen. Man braucht nur zu beachten, dass einerseits für die Tangentialkraft allgemein der Ausdruck $\frac{d^2 s}{d t^2}$ gilt, andererseits aber für unseren Fall dieselbe gleich $g \sin \alpha$ ist. Diess liefert zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = g \sin \alpha,$$

führt damit auf

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = g \sin^2 \alpha,$$

von hier aus zu

$$z = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin^2 \alpha,$$

mithin auch zu allen übrigen vorstehenden Werthen.

Aufgabe 141. Drei im Sinne der positiven Coordinaten eines rechtwinkligen Systems thätige Kräfte X, Y, Z, welche nach den Gesetzen

$$X = \frac{kx}{\sqrt{a^2 + 2x^2}},$$
$$Y = \frac{ky}{\sqrt{a^2 + 2y^2}},$$
$$Z = \frac{2b^2}{a} - \frac{ka}{\sqrt{a^2 + 2az}},$$
$$a,\ b,\ k \text{ constant}, \quad \frac{2b^2}{a} > k,$$

wirken, beeinflussen einen materiellen Punkt. Derselbe kann sich nur auf einer gemeinen oberhalb der xy-Ebene liegenden Parabel bewegen, deren Halbparameter a, deren Scheitel der Coordinatenanfang ist, deren Achse mit der z-Achse zusammenfällt und deren Ebene mit der xz-Ebene einen Winkel von 45 Grad bildet.

Die Bewegung des Punktes beginnt im Parabelscheitel mit der Geschwindigkeit $b\sqrt{2}$.

Von der Gleichung 9) der zu Nr. 138 gehörenden Lösung ausgehend soll man zunächst die Bahngeschwindigkeit v bestimmen und zwar sowohl als Function der erstiegenen Höhe z, wie auch als solche der verflossenen Zeit t.

Ferner für den Augenblick t die Coordinaten x, y, z des Ortes des Punktes, die Grösse des Druckes, welchen die Bahn erleidet und seine Richtungswinkel λ, μ, ν.

Lösung. Die Geschwindigkeit nimmt nach den Gesetzen

$$v = \frac{b}{a}\sqrt{2a(a+2z)}$$

und

$$v = \frac{b}{a}\sqrt{2(a^2+2b^2t^2)}$$

(die Zeit vom Bewegungsbeginne an gerechnet) zu.

Die Coordinaten der Horizontalprojection des sich bewegenden Punktes sind

$$x = bt \text{ und } y = bt;$$

er entfernt sich also der Zeit proportional von den beiden Verticalebenen und hat für $t = 1$ von ihnen den Abstand b.

Die erstiegenen Höhen z wachsen wie die Quadrate der verflossenen Zeiten und für die Einheit von t ist z gleich $\frac{b^2}{a}$.

Der auf die Bahn ausgeübte Druck ist überall gleich stark, nämlich gleich k.

Die Richtungswinkel desselben besitzen die Cosinuswerthe

$$\cos\lambda = -\frac{bt}{\sqrt{a^2+2b^2t^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2+2x^2}},$$

$$\cos\mu = \cos\lambda,$$

$$\cos\nu = \frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2t^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+2az}}.$$

Aufgabe 142. Die Verticalprojection und die seitliche Verticalprojection einer Linie sind Curven von den Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}z^2,$$

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{2z^3}.$$

Ein materieller Punkt ist gezwungen, sich auf dieser Linie zu bewegen und unterliegt Einflüssen, welche sich in den Richtungen der positiven Systemachsen zu den Kräften

$$X = 2k^2 z^2,$$
$$Y = 3\sqrt{2}\, k^2 z^{\frac{3}{2}},$$
$$' = 2k^2 (3z + 1)$$

.eine Bewegung im Coordinatenanfange
.tung seiner Bahn die Geschwindigkeit k.
, in der vorhergehenden Aufgabe Genannte.

Ohne Schwierigkeiten findet man

$$v = k(1 + z)^2$$

$$v = k e^{2kt},$$

wobei die Zeit vom Beginne der Bewegung an gezählt ist. Die Geschwindigkeiten wachsen also in geometrischer Progression.

Die Ortscoordinaten ergeben sich zu

$$x = \tfrac{1}{2}(e^{kt} - 1)^2,$$
$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\,(e^{kt} - 1)^{\frac{3}{2}},$$
$$z = e^{kt} - 1.$$

Bei der Berechnung des Druckes [nach Gl. 12) von Nr. 138] kommt man zunächst auf

$$x'' - X = k^2(3e^{kt} - 2),$$
$$y'' - Y = -\frac{k^2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3e^{2kt} - 10e^{kt} + 6}{\sqrt{e^{kt} - 1}},$$
$$z'' - Z = k^2(4 - 5e^{kt})$$

und erhält damit

$$N^2 = \frac{k^4}{2} \cdot \frac{9e^{4kt} + 8e^{3kt} - 36e^{2kt} + 24e^{kt} - 4}{e^{kt} - 1}.$$

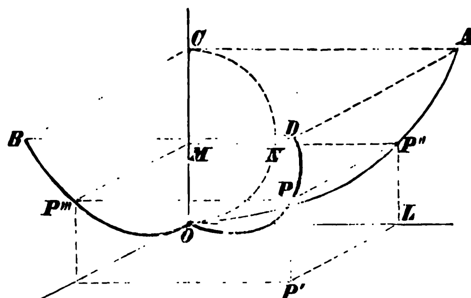
Durch die letzten vier Gleichungen sind [nach 13) von Nr. 138] auch die Richtungswinkel des Druckes bestimmt.

Wenn kt hinreichend gross ist, so kann man, ohne wesentlichen Fehler, im Zähler des vorstehenden Werthes von N^2 statt -4 auch -5 schreiben. Dann wird einfacher

$$N^2 = \tfrac{1}{2}k^4(9e^{3kt} + 17e^{2kt} - 19e^{kt} + 5).$$

Aufgabe 143. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist eine Cycloide $OP''A$ (Fig. 16) gezeichnet, für welche $OC = b$ der Durchmesser des erzeugenden Kreises, CA die halbe Basis und O der Scheitel ist; in der yz-Ebene eine gemeine Parabel, deren Halbparameter gleich $2a$, deren Achse die z-Achse und deren Scheitel ebenfalls der Coordinatenanfang. Ueber der Cycloide steht eine Cylinderfläche parallel zur y-Achse; über der Parabel eine andere parallel zur x-Achse.

Fig. 16.



Auf der Durchschnittslinie dieser beiden Flächen ist ein materieller Punkt beweglich, welcher, ausser von seiner eigenen Schwere, nur von einer Kraft U beeinflusst wird, die im Sinne der positiven z thätig ist.

Die Bewegung beginnt im Coordinatenanfange mit der Geschwindigkeit c. Sie soll derartig erfolgen, dass die Bahngeschwindigkeit v immer aus dem constanten Theile c und aus einem veränderlichen besteht, welcher letztere der erstiegenen Höhe z proportional ist und für z gleich 1 den Werth k hat.

Man soll berechnen

I. welcher Art die Kraft U sein muss, die diese Bewegung erzeugt;

II. welche Höhe z der Punkt zur Zeit t erstiegen hat;

III. wie gross die Geschwindigkeit v um diese Zeit ist.

Lösung. I. Die Kraft U muss aus einem constanten Theile $kc + g$ und aus einem veränderlichen bestehen, welcher letztere wie z wächst und für dessen Einheit gleich k^2 ist. $(U = kc + g + k^2 z)$.

Oder man kann auch sagen: sie besteht aus dem constanten Theile g und aus dem variabelen kv, welcher der Geschwindigkeit v proportional ist und für v gleich 1 den Werth k hat. $(U = g + kv)$.

II. Bei der Bestimmung von z als Function der (vom Bewegungsbeginne an gerechneten) Zeit t thut man wohl zu beachten, dass $\frac{dz}{dx}$ sich sofort angeben lässt, wenn man sich erinnert, dass die Tangente

im Punkte P'' der Geraden ON parallel sein muss. Man kommt zunächst auf

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}}\,t = \int \frac{dz}{(c+kz)\sqrt{z}}$$

und damit zu

$$z = \frac{c}{k}\,tan^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{kc}{a+b}}\,t\right).$$

III. Die zur Zeit t herrschende Geschwindigkeit ist

$$v = c\,sec^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{kc}{a+b}}\,t\right).$$

Capitel IV.

Aufgaben über die Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Erklärung. Befindet sich ein materieller Punkt, welcher die Masse M besitzt, im Abstande r von einer festen Drehachse und wird mit k die Winkelbeschleunigung bezeichnet, so hat man in

$$P = Mkr$$

diejenige Kraft, welche nöthig ist, um dem Punkte seine Beschleunigung kr zu ertheilen.

Wirkt diese Kraft am Hebelarme a, so stellt

$$Pa = Mkr^2$$

ihr Moment für die Drehung dar.

Liegt statt eines einzelnen Punktes ein ganzes System von materiellen Punkten vor, welche die Massen $M_1, M_2, M_3, \ldots$ haben und sich in den Abständen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ von der Drehachse befinden, so muss

$$Pa = M_1 k r_1^2 + M_2 k r_2^2 + M_3 k r_3^2 + \ldots$$

sein, oder kürzer ausgedrückt,

$$Pa = \Sigma(Mkr^2) = k\,\Sigma(Mr^2).$$

Für eine stetig vertheilte Masse wird hieraus

$$1)\qquad Pa = k\int r^2\,dM.$$

Dabei ist dM das Massenelement, also

$$dM = \varepsilon\,dV,$$

wenn mit ε die (constante oder variabele) Dichtigkeit und mit dV das Volumenelement bezeichnet wird.

Das Integral ist ein einfaches oder mehrfaches, je nach der Form der vorliegenden stetig zusammenhängenden Masse.

Dieser Form am besten entsprechend wird man auch entweder rechtwinklige, oder polare, oder noch andere Coordinaten wählen und dV in Bezug auf dieselben ausdrücken.

Nach Gleichung 1) ist das Integral

$$2) \qquad T = \int r^2 \, dM$$

das Maass für die Beharrung. Es heisst bekanntlich Trägheits-, Drehungs- oder Massenmoment.

Fällt die Drehachse, in Bezug auf welche dieses Moment genommen wird, mit der z-Achse eines räumlichen rechtwinkligen Coordinatensystems zusammen, so geht die Gleichung 2) über in

$$3) \qquad T_z = \int (x^2 + y^2) \, dM.$$

Ebenso lautet das auf die y-Achse bezogene Trägheitsmoment

$$4) \qquad T_y = \int (x^2 + z^2) \, dM$$

und endlich das für die x-Achse giltige

$$5) \qquad T_x = \int (y^2 + z^2) \, dM.$$

Unter dem Trägheitshalbmesser ϱ versteht man diejenige Entfernung von der Drehachse, in welcher die gesammte Masse M eines Massensystems, in einem Punkte concentrirt, dasselbe Trägheitsmoment haben würde, welches die in dem Systeme vertheilte Masse besitzt. Es ist also ϱ durch die Gleichung

$$6) \qquad M\varrho^2 = T = \int r^2 \, dM$$

bestimmt.

Hiernach ist T die auf die Entfernung 1 von der Drehachse reducirte Masse des Systems.

I. Trägheitsmomente gleichförmig dichter Linien, Flächen und Körper.

A. Trägheitsmomente von Linien.

a) Ebene Linien.

Aufgabe 144. Eine ebene Curve AB, die den constanten Querschnitt q und die Dichtigkeit ε besitzt*, hat in Bezug auf ein recht-

* Diese beiden Voraussetzungen mögen für alle unter A stehenden Aufgaben gelten.

winkliges Coordinatensystem die Gleichung $y = f(x)$. Der Anfangspunkt A steht um x_0, der Endpunkt B um x_1 von der Ordinatenachse ab.

I. Man soll die auf die x- und y-Achse bezogenen Trägheitsmomente T_x und T_y dieser Linie berechnen und

II. angeben, wie dieselben lauten, wenn die Curve bezogen auf Polarcoordinaten durch eine Gleichung von der Form $r = \varphi(\theta)$ gegeben ist und von θ_0 bis θ_1 gerechnet wird.

Lösung.

I. $$T_x = q\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$T_y = q\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} x^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

II. $$T_r = q\varepsilon \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 \sqrt{r^2 + r'^2}\, sin^2\theta\, d\theta,$$

$$T_y = q\varepsilon \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 \sqrt{r^2 + r'^2}\, cos^2\theta\, d\theta.$$

Aufgabe 145. Eine Gerade AB hat die Länge L und ist unter dem Winkel α gegen eine Drehachse UV geneigt, welche mit ihr in derselben Ebene liegt. Der Anfangspunkt A steht um c von dieser Achse ab.

I. Welches Trägheitsmoment T besitzt die Gerade in Bezug auf UV?

II. Wie vereinfacht sich dasselbe, wenn UV durch A gelegt wird und wie lautet es, wenn UV durch den Schwerpunkt von AB geht?

III. Welches sind in diesen beiden besonderen Fällen die Trägheitshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2?

Lösung. I. Nimmt man UV als x-Achse und denjenigen Punkt, in welchem AB, oder dessen Verlängerung, einschneidet, als Coordinatenanfang eines rechtwinkligen Systems, so erhält man leicht

$$T = q\varepsilon\, tan^2\alpha\, sec\,\alpha \int_{c\,cot\,\alpha}^{c\,cot\,\alpha + L\cos\alpha} x^2\, dx.$$

Von hier aus gelangt man zu folgenden Resultaten:

$$T = \frac{1}{3} M (3c^2 + 3c L \sin\alpha + L^2 \sin^2\alpha),$$

$M = q \varepsilon L =$ Masse der Geraden;

II. $$T_1 = \frac{1}{3} M L^2 \sin^2\alpha;$$

$$T_2 = \frac{1}{12} M L^2 \sin^2\alpha;$$

III. $$\varrho_1 = \frac{1}{3} L \sqrt{3} \sin\alpha;$$

$$\varrho_2 = \frac{1}{6} L \sqrt{3} \sin\alpha.$$

Aufgabe 146. Für den Quadranten der bekannten Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

soll I. das auf eine der Coordinatenachsen bezogene Trägheitsmoment (T_x oder T_y) bestimmt werden und II. der Trägheitshalbmesser ϱ.

Lösung. Man findet leicht

$$T_y = \frac{3}{8} q \varepsilon a^3 = \frac{1}{4} M a^2;\ *$$

$$\varrho = \frac{1}{2} a.$$

T_x hat offenbar denselben Werth wie T_y.

Aufgabe 147. Es soll unter Benutzung der bekannten für Polarcoordinaten geltenden Gleichungen (II. der Lösung zu Nr. 144) das Trägheitsmoment eines Kreisbogens bestimmt werden, dessen Radius a und dessen Centriwinkel γ ist — und zwar

I. in Bezug auf einen Durchmesser OX, welcher durch den Anfang des Bogens geht;

II. für einen solchen OY, der senkrecht zu dem ersten steht;

III. soll man T und ϱ für die ganze Kreisperipherie angeben.

Lösung.

I. $$T_x = \frac{1}{2} q \varepsilon a^3 (\gamma - \sin\gamma \cos\gamma);$$

II. $$T_y = \frac{1}{2} q \varepsilon a^3 (\gamma + \sin\gamma \cos\gamma);$$

III. $$T = \pi q \varepsilon a^3 = \frac{1}{2} M a^2;$$

$$\varrho = \frac{1}{2} a \sqrt{2},$$

also gleich der Hälfte der zum Quadranten gehörigen Sehne.

---

* Hierbei — und im Folgenden immer — bedeutet M die Masse, wenn nicht etwa ausdrücklich anders bestimmt ist.

b) Linien im Raume.

Aufgabe 148. Die Horizontal- und die Verticalprojection einer Curve AB haben die Gleichungen $y = f(x)$, bezüglich $z = \varphi(x)$. Dem Anfangspunkte A kommt die Abscisse a, dem Endpunkte B die Abscisse b zu. Die auf die drei Coordinatenachsen bezogenen Trägheitsmomente T_x, T_y und T_z sind anzugeben.

Lösung.

$$T_x = q\varepsilon \int_a^b (y^2 + z^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

$$T_y = q\varepsilon \int_a^b (x^2 + z^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

$$T_z = q\varepsilon \int_a^b (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Aufgabe 149. Die Gerade AB, welche die Länge L hat, steht mit ihrem Anfangspunkte A um b von einer Drehachse ab, mit der sie nicht in derselben Ebene liegt, und bildet mit ihr den Winkel α. Nimmt man diese Drehachse als x-Achse, die von A darauf gefällte Senkrechte als y-Achse und wählt die z-Achse vertical zur xy-Ebene, so schliesst AB mit den beiden letztgenannten Linien die Winkel β und γ ein. T_x ist zu bestimmen.

Lösung. Zunächst ergiebt sich (nach Nr. 148)

$$T_x = q\varepsilon \int_0^{L\cos\alpha} \left[\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\, x + b\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\, x\right)^2\right] \sec\alpha\, dx,$$

schliesslich aber

$$T_x = \tfrac{1}{3}\,(L^2 \sin^2\alpha + 3b\, L\cos\beta + 3b^2)\, M.$$

Die Anwendung auf besondere Fälle ist zu empfehlen.

Aufgabe 150. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist die Curve $z = \frac{1}{2}x^2$ gezeichnet; in der xy-Ebene die andere $y = \frac{2}{3}\sqrt{2x^3}$. Ueber der Ersteren steht eine Cylinderfläche parallel zur y-Achse, über der Letzteren eine der z-Achse gleichgerichtete.

Für die von 0 bis x gerechnete Durchschnittslinie dieser beiden Flächen sollen T_x und T_y bestimmt werden.

Lösung. $T_x = \frac{1}{360}\, q\varepsilon\, (80 + 82x + 15x^2)\, x^4,$

$T_y = \frac{1}{120}\, q\varepsilon\, (40 + 30x + 6x^2 + 5x^3)\, x^3.$

B. Trägheitsmomente von Flächen.

a) Ebene Flächen.

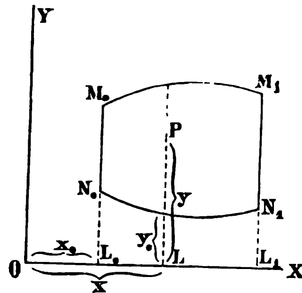
α) *Drehachse in der Ebene.*

Aufgabe 151. Eine Fläche $M_0 M_1 N_1 N_0$ (Fig. 17) von der constanten Dicke δ* wird oben und unten durch zwei Curven $M_0 M_1$ und $N_0 N_1$ begrenzt, denen, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, die Gleichungen

$$y_1 = f_1(x),$$
$$y_0 = f_0(x)$$

zukommen.

Fig. 17.



Welches Trägheitsmoment T_x besitzt der von x_0 bis x_1 gerechnete Theil derselben in Bezug auf die Achse der Abscissen und welches andere T_y bezogen auf die der Ordinaten?

Lösung.

$$T_x = \tfrac{1}{3}\,\delta\,\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (y_1^3 - y_0^3)\,dx,$$

$$T_y = \delta\,\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,x^2\,dx.$$

Aufgabe 152. Es sollen die auf die Halbachsen a und b bezogenen Trägheitsmomente T_a und T_b, nebst den zugehörigen ϱ_a und ϱ_b für einen Ellipsenquadranten bestimmt werden.

Lösung. T_a und T_b sind zunächst Doppelintegrale mit elliptischen Grenzen. Schafft man die Letzteren auf die bekannte Weise weg, so erhält man sehr schnell

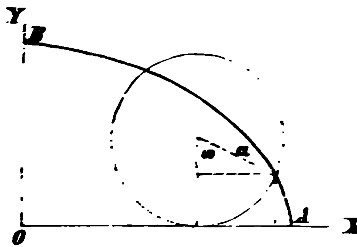
$$T_a = \tfrac{1}{16}\,\pi\,\delta\,\varepsilon\,a b^3 = \tfrac{1}{4}\,b^2 M,$$
$$T_b = \tfrac{1}{16}\,\pi\,\delta\,\varepsilon\,a^3 b = \tfrac{1}{4}\,a^2 M,$$
$$\varrho_a = \tfrac{1}{2}\,b,$$
$$\varrho_b = \tfrac{1}{2}\,a.$$

Aufgabe 153. Für die Fläche AOB einer gemeinen Cycloide (Fig. 18) sind T_x, T_y, ϱ_x und ϱ_y zu berechnen.

---

* Die Dicke δ möge bei den unter B. stehenden Aufgaben immer vorausgesetzt werden.

Fig. 18.



Lösung. Man findet zuerst

$$T_x = \tfrac{1}{3}\,\delta\,\varepsilon\,a^4 \int_0^{\pi} (1 - \cos\omega)^4\, d\omega$$

und damit dann

$$T_x = \tfrac{35}{24}\,\pi\,\delta\,\varepsilon\,a^4 = \tfrac{35}{36}\,a^2 M.$$

Ferner

$$T_y = \delta\,\varepsilon\,a^4 \int_0^{\pi} (1 - \cos\omega)^2\,(\pi - \omega + \sin\omega)^2\, d\omega$$

oder

$$T_y = 4\,\delta\,\varepsilon\,a^4 \int_0^{\pi} (\pi - \omega + \sin\omega)^2 \sin^4\frac{\omega}{2}\, d\omega.$$

Diess liefert nach leichter Zwischenrechnung

$$T_y = \pi\,\delta\,\varepsilon\,\frac{12\pi^2 - 35}{24}\,a^4 = \tfrac{1}{36}\,(12\pi^2 - 35)\,a^2 M.$$

Es ist daher

$$\varrho_x = \tfrac{1}{6}\sqrt{35}\,a,$$

$$\varrho_y = \tfrac{1}{6}\sqrt{12\pi^2 - 35}\,a.$$

Aufgabe 154. Eine Fläche $B_0 C_0 B_1 C_1$ ist durch zwei Curven $B_0 C_0$, $B_1 C_1$ (vergl. Fig. 7 des I. Theiles), deren Polargleichungen

$$r_0 = f_0(\theta), \quad r_1 = f_1(\theta)$$

sind, und durch zwei Leitstrahlen $B_0 B_1$, $C_0 C_1$, welche zu den Anomalien $A_0 O B_0 = \theta_0$, $A_0 O C_0 = \theta_1$ gehören, begrenzt.

I. Welche Werthe haben T_x und T_y?

II. Wie lauten dieselben dann, wenn die Fläche ein voller Kreisring ist, dessen Radien a und b sind?

III. Welches ist der Trägheitshalbmesser ϱ dieses Ringes?

Lösung.

I. $$T_x = \tfrac{1}{4}\,\delta\,\varepsilon \int_{\theta_0}^{\theta_1} (r_1^4 - r_0^4) \sin^2\theta\, d\theta,$$

$$T_y = \tfrac{1}{4}\,\delta\,\varepsilon \int_{\theta_0}^{\theta_1} (r_1^4 - r_0^4) \cos^2\theta\, d\theta.$$

II. $$T_x = T_y = \frac{1}{4}\pi\delta\varepsilon(a^4 - b^4).$$

III. $$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Aufgabe 155. Die bei der vorhergehenden Lösung unter I. gefundenen Gleichungen sollen benutzt werden, um für einen elliptischen Ring die auf seine Achsen bezogenen Trägheitsmomente T_a und T_b zu bestimmen. Die innere Ellipse hat die Halbachsen a und b, die äussere a_1 und b_1.

Lösung. Zunächst kommt man auf

$$\frac{1}{4}T_a = \frac{1}{4}\delta\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{(\alpha_1^2\cos^2\theta + \beta_1^2\sin^2\theta)^2} - \frac{1}{(\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta)^2}\right]\sin^2\theta\,d\theta.$$

worin α_1, β_1, α, β, die reciproken Werthe von a_1, b_1, a und b sind. Schliesslich ergiebt sich

$$T_a = \frac{1}{4}\pi\delta\varepsilon(a_1 b_1^3 - a b^3)$$

und

$$T_b = \frac{1}{4}\pi\delta\varepsilon(a_1^3 b_1 - a^3 b),$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$T_a = \frac{1}{4}(M_1 b_1^2 - M b^2),$$

bezüglich

$$T_b = \frac{1}{4}(M_1 a_1^2 - M a^2),$$

wenn M_1 die Masse der äusseren, M die der inneren Ellipse bezeichnet.

Man vergleiche diese Resultate mit denen von Nr. 152.

β) *Drehachse senkrecht zur Ebene.*

Aufgabe 156. Es soll für die in Nr. 151 bezeichnete Fläche das auf die (senkrecht zur xy-Ebene stehende) z-Achse bezogene Trägheitsmoment T_z bestimmt und nachher mit T_x nebst T_y verglichen werden.

Lösung.

$$T_z = \delta\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\left\{x^2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_1^3 - y_0^3)\right\}dx;$$

$$T_z = T_x + T_y.$$

Aufgabe 157. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten a und b. Man soll für eine zu seiner Fläche normal stehende und durch den Scheitel des rechten Winkels gehende Achse das Trägheitsmoment T und den Halbmesser ϱ berechnen.

Lösung.

$$T = \tfrac{1}{12}\,\delta\,\varepsilon\,a\,b\,(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{6}\,(a^2 + b^2)\,M$$

oder, wenn mit c die Länge der Hypotenuse bezeichnet wird,

$$T = \tfrac{1}{12}\,\delta\,\varepsilon\,a\,b\,c^2 = \tfrac{1}{6}\,c^2 M.$$

Daher

$$\varrho = \frac{c}{\sqrt{6}} = \tfrac{1}{6}\,c\sqrt{6}.$$

Aufgabe 158. Für ein regelmässiges Sechseck (Seitenlänge a) sind T_z und ϱ in Bezug auf die durch den Mittelpunkt gelegte Achse zu bestimmen.

Lösung. Am geschicktesten ist es, zunächst $\tfrac{1}{12}\,T_z$ zu berechnen, indem man eines der sechs gleichseitigen Dreiecke so legt, dass es von der x-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems halbirt wird. Es ergiebt sich

$$T_z = \tfrac{5}{8}\sqrt{3}\,\delta\,\varepsilon\,a^4 = \tfrac{5}{12}\,a^2 M;$$

$$\varrho = \sqrt{\tfrac{5}{12}}\,a.$$

Aufgabe 159. Das letzte der unter Nr. 156 gefundenen Resultate soll angewendet werden, um T_z nebst dem zugehörigen ϱ für einen Ellipsenquadranten zu ermitteln.

Lösung. Man erhält

$$T_z = \tfrac{1}{4}\,(a^2 + b^2)\,M;$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

und zwar, wenn die Lösung von Nr. 152 benutzt werden darf, ohne alle Rechnung.

Aufgabe 160. Wie 159, doch liegt nicht ein Ellipsenquadrant vor, sondern die in Fig. 18 gezeichnete halbe Cycloidenfläche.

Lösung.

$$T_z = \tfrac{1}{2}\,\pi^3\,\delta\,\varepsilon\,a^4 = \tfrac{1}{3}\,\pi^2 a^2 M;$$

$$\varrho = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,\pi\,a,$$

nach Nr. 153.

Aufgabe 161. Für die in Nr. 154 näher bezeichnete Fläche soll T_z bestimmt und mit T_x nebst T_y verglichen werden. Ferner soll man die gefundenen Ergebnisse benutzen, um T_z und ϱ für einen vollständigen Kreisring anzugeben, dessen innere und äussere Radien b, bezüglich a, sind.

Lösung.

$$T_z = \tfrac{1}{4}\delta\varepsilon\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_1^4 - r_0^4)\,d\theta;$$

$$T_z = T_x + T_y.$$

Für den Kreisring:

$$T_z = \tfrac{1}{2}\pi\delta\varepsilon\,(a^4 - b^4) = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)\,M;$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a^2 + b^2)}.$$

b) Umdrehungsflächen.

Aufgabe 162. Eine ebene Curve $A_0 A_1$, deren Gleichung

$$z = f(x)$$

ist, dreht sich um die z-Achse des rechtwinkligen Coordinatensystems. Sie wird von x_0 bis x_1 oder von z_0 bis z_1 gerechnet. T_z und ϱ sollen für die zum Drehwinkel ω gehörende Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ bestimmt werden.

Lösung.

$$T_z = \delta\varepsilon\omega\int_{x_0}^{x_1} x^3\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

oder auch

$$T_z = \delta\varepsilon\omega\int_{z_0}^{z_1} x^3\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\,dz.$$

Ferner

$$\varrho = \sqrt{\frac{T_z}{M}},$$

wobei

$$M = \delta\varepsilon\omega\int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx = \delta\varepsilon\omega\int_{z_0}^{z_1} x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\,dz.$$

Aufgabe 163. Ein abgestumpfter Kegel hat a_2 und a_1 als Halbmesser der Parallelflächen, h als Stumpfhöhe. Das T_z und das ϱ seiner Mantelfläche sind zu ermitteln.

Lösung.

$$T_z = \tfrac{1}{2}\pi\delta\varepsilon\,(a_2^2 + a_1^2)\,(a_2 + a_1)\,\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + h^2}$$

oder, da die Masse M des Mantels gleich $\pi\delta\varepsilon(a_2+a_1)\sqrt{(a_2-a_1)^2+h^2}$ ist,

$$T_z = \tfrac{1}{2}(a_2^2+a_1^2)M,$$

folglich

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a_2^2+a_1^2)}.$$

Aufgabe 164. Um eine Achse OZ, die ihn in einem seiner Endpunkte berührt, dreht sich ein Viertelkreis, dessen Radius a ist. T_z und ϱ sollen für die erzeugte Rotationsfläche berechnet werden.

Lösung. Zuerst ergiebt sich

$$T_z = 2\pi\delta\varepsilon a \int_0^a \frac{x^3}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx;$$

hieraus dann

$$T_z = \tfrac{1}{6}\pi(15\pi-44)\delta\varepsilon a^4.$$

Für die Masse findet man

$$M = \pi(\pi-2)\delta\varepsilon a^2,$$

hat mithin

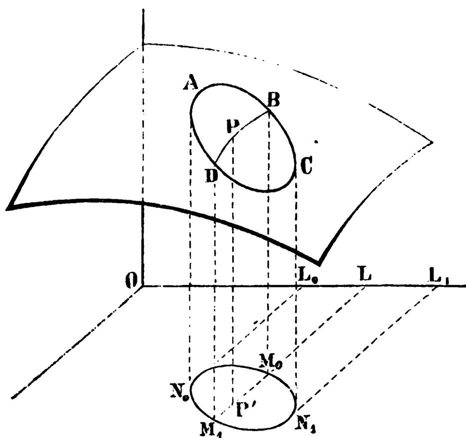
$$\varrho = \sqrt{\frac{15\pi-44}{6(\pi-2)}}\,a.$$

c) Allgemein krumme Flächen.

Aufgabe 165. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist eine Fläche (Fig. 19) durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

Fig. 19.



gegeben. Die xy-Projection eines gewissen Theiles derselben wird durch zwei Curven $N_0M_0N_1$ und $N_0M_1N_1$ begrenzt, welche die Gleichungen $y_0 = f_0(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ haben. Sie werden von der Abscisse $OL_0 = x_0$ bis zu der Abscisse $OL_1 = x_1$ gerechnet. Man soll die auf die drei Coordinatenachsen bezogenen Trägheitsmomente T_x, T_y und T_z ermitteln.

Lösung.

$$T_x = \delta\,\varepsilon \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (y^2 + z^2)\, R\, dx\, dy,$$

$$T_y = \delta\,\varepsilon \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (x^2 + z^2)\, R\, dx\, dy,$$

$$T_z = \delta\,\varepsilon \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (x^2 + y^2)\, R\, dx\, dy,$$

wobei

$$R = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Aufgabe 166. Um den Mittelpunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist ein Kugeloctant construirt, dessen Radius gleich a ist. In der xy-Ebene befindet sich ein Halbkreis über der x-Achse, welcher den Halbmesser $\frac{1}{2}a$ hat und von der y-Achse berührt wird. T_z und das zugehörige ϱ sollen für den über diesem Halbkreise liegenden Kugelflächentheil bestimmt werden.

Lösung. Man kommt zunächst auf

$$T_z = \delta\,\varepsilon\, a \int_0^a \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

Hier empfiehlt sich aus naheliegenden Gründen die Einführung von Polarcoordinaten.

Es resultirt

$$T_z = \tfrac{1}{9}(3\pi - 7)\,\delta\,\varepsilon\, a^4.$$

Da nun (Aufg. 78 des ersten Theiles) die Masse

$$M = \tfrac{1}{2}(\pi - 2)\,\delta\,\varepsilon\, a^2$$

ist, so kann man auch schreiben

$$T_z = \frac{2(3\pi - 7)}{9(\pi - 2)} a^2,$$

hat also

$$\varrho = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{2(3\pi - 7)}{\pi - 2}}\, a.$$

C. Trägheitsmomente von Körpern.

a) Umdrehungskörper.

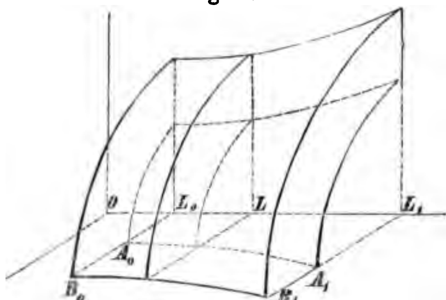
α) *Drehachse die geometrische Achse.*

Aufgabe 167. In der xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist die Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ (Fig. 20) vorgeschrieben, die von der Abscisse $OL_0 = x_0$ bis $OL_1 = x_1$ gerechnet wird. Die Gleichungen der sie begrenzenden Curven $A_0 A_1$, bezüglich $B_0 B_1$, lauten

$$y_0 = f_0(x) \text{ und } y_1 = f_1(x).$$

Sie dreht sich ein volles Mal um die x-Achse und erzeugt dadurch einen allgemeinen Rotationskörper, dessen auf jene Achse bezogenes Trägheitsmoment T_x bestimmt werden soll.

Fig. 20.



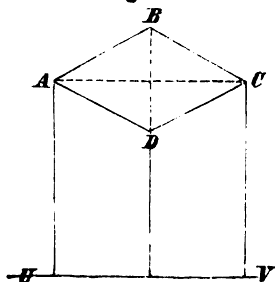
Lösung. Für die vorliegenden rechtwinkligen Coordinaten ist T_x zunächst ein dreifaches Integral führt man aber, was offenbar der Natur des Umdrehungskörpers besser entspricht, cylindrische ein (r, ω und x), so erhält man schliesslich ein einfaches, nämlich

$$T_x = \frac{1}{2}\pi\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (y_1^4 - y_0^4)\, dx.$$

Ist der Rotationskörper nicht hohl, sondern massiv, so geht diese Gleichung über in

$$T_x = \frac{1}{2}\pi\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} y_1^4\, dx.$$

Fig. 21.



Aufgabe 168. Ein Rhombus, dessen Diagonalen $AC = 2a$ und $BD = 2b$ sind (Fig. 21), dreht sich ein volles Mal um die Achse UV, welche parallel zu AC im Abstande c liegt.

Man soll für den erzeugten Ring (Schwungrad mit Rhombusquerschnitt) das auf die Rotationsachse bezogene T_x und ϱ berechnen.

Lösung. Es ergiebt sich

$$T_x = 8\pi\varepsilon b c \int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)\left\{c^2+b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right\}dx$$

und hieraus

$$T_x = 2\pi\varepsilon a b c\,(b^2+2c^2).$$

Für die Masse M des Ringes liefert die Guldin'sche Regel

$$M = 4\pi\varepsilon a b c;$$

mithin ist

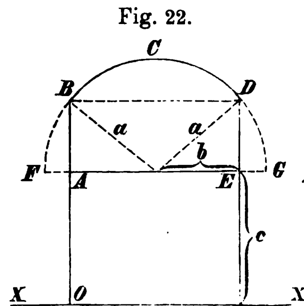
$$T_x = \tfrac{1}{2} M (b^2+2c^2)$$

und daher

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+2c^2)}.$$

Aufgabe 169. I. Das Trägheitsmoment T_x desjenigen Ringes (Schwungrades) soll bestimmt werden, welcher entsteht, wenn sich der Querschnitt $ABCDE$ (Fig. 22) um die Achse XOX dreht.

Fig. 22.



II. Soll angegeben werden, wie jenes T_x lautet, wenn der genannte Querschnitt in den Halbkreis $FBCDG$ übergeht.

Lösung.

$$T_x = \tfrac{1}{30}\pi\varepsilon\left\{2b\,(15a^4+3b^4-10a^2b^2+90a^2c^2-30b^2c^2)\right.$$
$$+\,15bc\,(5a^2-2b^2+4c^2)\sqrt{a^2-b^2}$$
$$\left.+\,15a^2c\,(3a^2+4c^2)\arcsin\frac{b}{a}\right\}.$$

In dem genannten besonderen Falle:

$$T_x = \tfrac{1}{60}\pi\varepsilon a^2\{16a\,(2a^2+15c^2)+15\pi c\,(3a^2+4c^2)\}.$$

Aufgabe 170. Ein Rotationsparaboloid von der Höhe h und dem Halbparameter p wird durch ein anderes ausgehöhlt, welches dieselbe Achse hat, dessen Scheitel von dem des ersten um a absteht und dessen Halbparameter q ist. Zu berechnen T_x unter Benutzung der ersten bei Nr. 167 angegebenen Gleichung.

Lösung. Zunächst findet man

$$T_x = \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon\left\{\int_0^a 4p^2x^2\,dx + \int_a^h [4p^2x^2-4q^2(x-a)^2]\,dx\right.;$$

diess liefert schliesslich

$$T_x = \frac{2}{3} \pi \varepsilon \{ p^2 h^3 - q^2 (h-a)^3 \}.$$

Geht das hohle Paraboloid in ein massives über, so wird diese Gleichung zu der sehr bekannten

$$T = \frac{2}{3} \pi \varepsilon p^2 h^3.$$

Die letzte Formel kann, wie man leicht übersieht, auch benutzt werden, um die vorhergehende zu erhalten.

Ferner können auch die Massen

$$M_1 = \pi \varepsilon p h^2 \text{ und } M_2 = \pi \varepsilon q (h-a)^2$$

zur Einführung gelangen.

Aufgabe 171. In der xz-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems liegt ein mit dem Halbmesser a construirter Viertelkreis derartig, dass die Achsen der x und z ihn berühren. T_x und ϱ sollen für denjenigen massiven Rotationskörper bestimmt werden, welcher entsteht, wenn der genannte Quadrant um die Abscissenachse eine volle Umdrehung macht.

Lösung. Hier empfiehlt sich offenbar die Benutzung von Polarcoordinaten.

Es entsteht

$$T_x = \frac{1}{120} \pi (332 - 105\pi) \varepsilon a^5 = 0{,}0558 \varepsilon a^5.$$

Für die Masse ergiebt sich

$$M = \frac{1}{6} \pi (10 - 3\pi) \varepsilon a^3.$$

Mithin ist

$$\varrho = \sqrt{\frac{332 - 105\pi}{20(10 - 3\pi)}}\, a = 0{,}43\, a.$$

β) Drehachse senkrecht zur geometrischen Achse.

Aufgabe 172. Es soll für den in Nr. 167 bezeichneten allgemeinen Umdrehungskörper das auf die z-Achse bezogene Trägheitsmoment T_z berechnet werden.

Lösung. Bei Verwendung cylindrischer Coordinaten, die hier jedenfalls am geeignetsten sind, erhält man leicht

$$T_z = \pi \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \{ x^2 + \frac{1}{4} (y_1^2 + y_0^2) \} (y_1^2 - y_0^2)\, dx$$

der, für die Anwendung brauchbarer geschrieben,

$$T_z = \pi \varepsilon \left\{ \int_{x_0}^{x^1} x^2 (y_1^2 - y_0^2)\, dx + \tfrac{1}{4} \int_{x_0}^{x_1} (y_1^4 - y_0^4)\, dx \right\}.$$

Aufgabe 173. Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist er-
ugt worden, indem sich die von $x = 0$ bis $x = a$ gerechnete semi-
ubische Parabel

$$y_1 = b + x \sqrt{x}$$

n volles Mal um die Abscissenachse drehte. Der Körper besitzt eine
lindrische Aushöhlung vom Durchmesser $2b$, deren Achse mit der
r x zusammenfällt. T_z ist zu ermitteln.

Lösung. Die unter der vorigen Nummer angegebenen Gleich-
ngen liefern

$$_z = \pi \varepsilon a^2 h \left(\tfrac{1}{28} a^4 \sqrt{a} + \tfrac{1}{6} a^3 \sqrt{a} + \tfrac{2}{11} a^3 b + \tfrac{4}{9} a^2 b + \tfrac{3}{8} a \sqrt{a}\, b^2 + \tfrac{2}{5} b^3 \right).$$

Aufgabe 174. Welches T_z hat ein massiver Kegel (Basis-
dius b, Höhe h) bezogen auf eine Drehachse, welche ausserhalb des-
lben, auf der Seite der Kegelspitze, im Abstande a von der letzteren
gt, die Kegelachse schneidet und senkrecht zu ihr steht?

Welchen Werth besitzt dieses T_z dann, wenn die Drehachse durch
e Spitze geht?

Lösung.

$$T_z = (a^2 + \tfrac{3}{2} ah + \tfrac{3}{5} h^2 + \tfrac{3}{20} b^2)\, M$$

d im speciellen Falle:

$$T_z = \tfrac{3}{20} (b^2 + 4h^2)\, M.$$

Aufgabe 175. Das Doppelte des in Nr. 171 vorgeschriebenen
mdrehungskörpers ist derartig gelegen, dass es von der yz-Ebene
lbirt wird; T_z und das zugehörige ϱ sind zu bestimmen.

Lösung.

$$T_z = \tfrac{1}{40} \pi \varepsilon (268 - 85\pi)\, a^5.$$
$$M = \tfrac{1}{3} \pi \varepsilon (10 - 3\pi)\, a^3.$$

Daher

$$\varrho = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{3\,(268 - 85\,\pi)}{10\,(10 - 3\,\pi)}}\, a.$$

Aufgabe 176. Für eine massive Kugel, welche den Radius a
t, sollen T_z und ϱ in Bezug auf eine Drehachse berechnet werden,

die vom Mittelpunkte um c ($> a$) entfernt ist und einen Durchmesser senkrecht schneidet.

Lösung. Am besten mit Benutzung von Polarcoordinaten ergiebt sich

$$T_z = \tfrac{1}{5}(2a^2 + 5c^2)M,$$

also

$$\varrho = \sqrt{\frac{2a^2 + 5c^2}{5}}.$$

b) Körper, welche nicht von Umdrehungsflächen begrenzt werden.

Aufgabe 177. Eine gerade, regelmässige, sechsseitige Pyramide ist durch ihre Höhe h und durch die Grundflächenseite a gegeben. Es soll durch dreifache Integration (vergl. Nr. 178) das auf ihre Achse bezogene T bestimmt und auch ϱ ermittelt werden.

Lösung. Wenn man die Pyramide geschickt gegen das Coordinatensystem legt, so hat man sehr schnell $\frac{1}{12}T$, damit dann auch T, nämlich

$$T = \tfrac{5}{8}\sqrt{3}\,\varepsilon\,a^4 h,$$
$$T = \tfrac{1}{4}a^2 M,$$

mithin

$$\varrho = \tfrac{1}{2}a,$$

also einen recht hübschen einfachen Satz.

Aufgabe 178. Die vorige Aufgabe soll gelöst werden, indem man die Pyramide parallel zur Grundfläche in unendlich dünne Schichten zerlegt, die Trägheitsmomente dieser letzteren bestimmt und summirt.

Lösung. Man berechnet zunächst die Masse dM eines der schichtenförmigen Elemente, multiplicirt dieselbe mit dem Quadrate ihres Trägheitshalbmessers (wobei die Lösung von Nr. 158 in Betracht kommt) und integrirt. Das Integral ist hier (im Gegensatze zu Nr. 177) ein einfaches und zwar

$$T = \tfrac{5}{8}\sqrt{3}\,\varepsilon\,\frac{a^4}{h^4}\int_0^h (h-z)^4\,dz.$$

Es liefert selbstverständlich das vorige Resultat.

Aufgabe 179. Eine bei O durchaus rechtwinklige, dreiseitige Pyramide $OABC$ hat die Kantenlängen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Das auf a bezogene T_a soll ermittelt werden, indem man sich den Körper parallel zur Ebene bc in unendlich dünne Schichten zerspalten denkt, für eine derselben dT_a bestimmt, etc. wie bei 178.

Ferner sollen T_b und T_c angegeben werden.

Lösung.

$$T_a = \tfrac{1}{12}\,\varepsilon \frac{b\,c\,(b^2+c^2)}{a^4} \int_0^a (a-x)^4\,dx;$$

$$T_a = \tfrac{1}{60}\,\varepsilon\,a\,b\,c\,(b^2+c^2) = \tfrac{1}{10}\,(b^2+c^2)\,M.$$

$$T_b = \tfrac{1}{10}\,(a^2+c^2)\,M.$$

$$T_c = \tfrac{1}{10}\,(a^2+b^2)\,M.$$

Aufgabe 180. Die Halbachsen a und b der Grundfläche eines elliptischen, geraden Kegels, wie auch seine Höhe h, sind gegeben. Zu berechnen ist das für seine Achse geltende T und zwar durch einfache Integration.

Lösung. Mit Beachtung der zu Nr. 159 gehörenden Resultate hat man sehr leicht

$$T = \frac{\pi\,\varepsilon\,(a^2+b^2)\,a\,b}{4h^4} \int_0^h (h-z)^4\,dz;$$

$$T = \tfrac{1}{20}\,\pi\,\varepsilon\,(a^2+b^2)\,a\,b\,h = \tfrac{3}{20}\,(a^2+b^2)\,M.$$

Aufgabe 181. Von einem ganz allgemeinen, geraden Kegel kennt man die Höhe h, den Inhalt G der Grundfläche und ihren Trägheitshalbmesser ϱ. Mittelst einfacher Integration soll das auf die Höhenlinie bezügliche T bestimmt werden.

Lösung.

$$T = \frac{\varepsilon\,\varrho^2\,G}{h^4} \int_0^h (h-z)^4\,dz;$$

$$T = \tfrac{1}{5}\,G\,h\,\varepsilon\,\varrho^2 = \tfrac{3}{5}\,M\varrho^2.$$

Aufgabe 182. Die Grundfläche eines Kegels besteht aus vier Cycloidenflächenquadranten [von denen Fig. 18 (bei Nr. 153) einen darstellt]; seine Höhe ist h. Die letzte Gleichung der vorhergehenden

Nummer soll verwendet werden, um das auf die Kegelachse bezogene T zu berechnen.

Lösung. Der Trägheitshalbmesser der Basis wurde unter 160 ermittelt. Die Benutzung jenes Resultates liefert

$$T = \tfrac{1}{5}\,\pi^2 a^2 M = \tfrac{2}{5}\,\varepsilon\pi^3 a^4 h.$$

Aufgabe 183. Für das Ellipsoid sollen die auf die drei Achsen a, b, c bezogenen Trägheitsmomente ermittelt werden und zwar

I. durch dreifache Integration;

II. durch einfache, indem man in unendlich dünne Schichten zerlegt und das zu Nr. 159 gehörende Ergebniss benutzt.

Lösung.

$$\text{I.}\qquad T_c = \varepsilon \int\limits_0^a \int\limits_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \int\limits_0^{c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Nach Wegschaffung der elliptischen Grenzen führt diess auf

$$T_c = \tfrac{4}{15}\,\pi\varepsilon\,abc\,(a^2+b^2) = \tfrac{1}{5}\,(a^2+b^2)\,M.$$

Daher

$$T_b = \tfrac{1}{5}\,(a^2+c^2)\,M,$$
$$T_a = \tfrac{1}{5}\,(b^2+c^2)\,M.$$

$$\text{II.}\qquad T = \frac{\pi\varepsilon\,(a^2+b^2)\,ab}{2\,c^4} \int\limits_0^c (c^2-z^2)\,dz.$$

Resultate selbstverständlich wie bei I.

Aufgabe 184. Ein schiefabgeschnittenes, gerades Prisma hat als Grundfläche ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten $AB = a$ und $AD = b$ sind. Die drei Seitenkanten, welche in AB und C stehen, besitzen die Längen c, c_1, c_2; die vierte, hierdurch bestimmte, ist c_3. Sie sind sämmtlich bekannt.

Das auf die Kante c bezogene T_c wird gesucht.

Lösung.

$$T_c = \varepsilon \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^{c-\frac{c-c_1}{a}x-\frac{c-c_3}{b}y} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

oder auch

$$T_c = \varepsilon \int_0^a \int_0^b \int_0^{c - \frac{c-c_1}{a}x - \frac{c_1-c_2}{b}y} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

her schliesslich

$$T_c = \tfrac{1}{12}\varepsilon\, a b \left\{a^2 (2 c_3 + 3 c_1 - c) + b^2 (3 c_3 + 2 c_1 - c)\right\},$$

er

$$T_c = \tfrac{1}{12}\varepsilon\, a b \left\{a^2 (c + c_1 + 2 c_2) + b^2 (2 c - c_1 + 3 c_2)\right\}.$$

Bei gleich langen Seitenkanten liefert diess das bekannte Resultat

$$T_c = \tfrac{1}{3}\varepsilon\, a b c\, (a^2 + b^2).$$

D. Trägheitsmomente für parallele Achsen.

Aufgabe 185. I. Welche Beziehung besteht zwischen den auf eichgerichtete Drehachsen bezogenen Trägheitsmomenten T und T_1 ner ebenen Curve?

II. Wie lautet diese Beziehung, wenn eine der Achsen durch den chwerpunkt der Linie geht?

III. Wie folgt mittelst derselben aus dem unter Nr. 145 entickelten T_2 das daselbst angegebene T der Geraden?

IV. In welchem Verhältnisse steht das auf eine Tangente bezogene rägheitsmoment T_t einer vollen Kreislinie zu demjenigen T_d, weles für einen zu dieser Berührenden parallelen Durchmesser gilt?

Lösung. I. Man findet leicht

$$T_1 = T + 2 k M \eta + k^2 M,$$

obei k die gegenseitige Entfernung der beiden Drehachsen und η der bstand des Schwerpunktes der Masse M von der ursprünglichen Achse, so von derjenigen, auf welche T bezogen ist.

II. $$T_1 = T_0 + k^2 M,$$

nn für T in diesem speciellen Falle lieber T_0 geschrieben wird.

III. T folgt aus T_2, wenn man in die vorige Gleichung

$$k = c + \tfrac{1}{2} L \sin\alpha$$

führt.

IV. T_t ist das Dreifache von T_d, wie sich aus dem unter Nr. 147 III refführten Resultate sofort ergiebt.

Aufgabe 186. In einer Ebene, deren Begrenzung man kennt, liegen zwei parallele Drehachsen, bezüglich welcher T und T_1 die Trägheitsmomente sind. Der Zusammenhang zwischen den Letzteren wird gesucht.

Lösung. Die Resultate lauten wie die unter I und II in der vorhergehenden Nummer angegebenen.

Aufgabe 187. I. Welche Trägheitsmomente T_A und T_B besitzt die Ellipsenfläche in Bezug auf Tangenten in den Endpunkten A und B ihrer grossen und ihrer kleinen Achse?

II. Welche T_A und T_B hat — für Berührende in A und B (Fig. 18 bei Nr. 153) — die Cycloidenfläche?

Lösung. I. Mit Benutzung von Nr. 152 ergiebt sich sofort, dass T_A fünfmal so gross ist, wie das auf die kleine Ellipsenachse bezogene Trägheitsmoment; ebenso T_B das Fünffache von dem für die grosse Achse geltenden.

II. Die zu Nr. 153 gehörende Lösung liefert

$$T_A = \tfrac{1}{36}(48\pi^2 - 35)\, a^2 M$$

und

$$T_B = \tfrac{179}{36}\, a^2 M.$$

Aufgabe 188. Wie 186, doch für den Körper.

Lösung. Nimmt man die ursprüngliche der beiden Drehachsen (nämlich diejenige, auf welche T bezogen ist) als z-Achse eines rechtwinkligen Systems und legt die xz-Ebene desselben derartig, dass sie die andere vorgeschriebene Drehachse in sich enthält, so ergiebt sich ohne alle Mühe

$$T_1 = T - 2k M \xi + k^2 M.$$

Dabei bedeutet ξ die Abscisse des Schwerpunktes.

Geht durch den Letzteren die eine der beiden Drehachsen, so wird

$$T_1 = T_0 + k^2 M,$$

wie bei Nr. 185 II und 186.

Diese Gleichung gilt auch dann noch, wenn die erste Achse zwar nicht durch den Schwerpunkt läuft, letzterer aber in derjenigen Ebene sich befindet, welche senkrecht zur gemeinschaftlichen Normale der beiden Drehachsen so liegt, dass sie die ursprüngliche in sich enthält.

Aufgabe 189. I. Es soll (mit Benutzung von Nr. 183) das Trägheitsmoment T_1 eines aus den Halbachsen a, b und c construirten Ellipsoids für eine Drehachse bestimmt werden, welche durch einen der Scheitel geht und der c-Achse gleichgerichtet liegt.

I. Desgleichen (unter Verwendung von Nr. 168 und Fig. 21) für durch Rotation eines Rhombus entstandenen Ring-(Schwung- mit Rhombusquerschnitt) in Bezug auf eine durch die ste Ringkante gehende Drehachse, welche der geometrischen desselben parallel ist.

ösung. I. Geht die Drehachse durch einen der beiden a-Scheitel, man

$$T_1 = \frac{1}{5}(6a^2 + b^2) M;$$

ie hingegen durch einen der b-Scheitel, so ist

$$T_1 = \frac{1}{5}(a^2 + 6b^2) M.$$

I. Für das Schwungrad ergiebt sich

$$T_1 = \frac{1}{2}(3b^2 + 4bc + 4c^2) M.$$

Aufgabe 190. Ein schiefabgeschnittenes, gerades ma hat ein Quadrat mit der Seitenlänge a als Grundfläche. Zwei egenüber liegende seiner Seitenkanten haben beide die Länge c_1, deren die Längen c und c_2.

Mit Benutzung der Lösung von Nr. 184 soll das Trägheitsmoment Körpers für eine Drehachse berechnet werden, welche den Seiten- parallel ist und durch den Schwerpunkt geht.

ösung. Nach Nr. 91 des ersten Theiles ist die Schwerpunkts ekannt.

Schliesslich ergiebt sich

$$T_0 = \frac{1}{72} \varepsilon a^4 \frac{11c_1^2 + 2cc_1 - c^2}{c_1}$$

uch, weil die Masse

$$M = \varepsilon a^2 c_1$$

$$T_0 = \frac{1}{72} a^2 \frac{11c_1^2 + 2cc_1 - c^2}{c_1^2} M.$$

Aufgabe 191. Von einem allgemeinen Kegel, oder einer emeinen Pyramide, für welche die Gerade OM, die die O mit dem Grundflächenschwerpunkte M verbindet, die Länge a kennt man das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine durch O nein gehende Achse DD. Es soll ermittelt werden

I. welchen Werth T_1 es für eine andere Drehachse D_1D_1 besitzt, die in dem auf OM gemessenen Abstande b von der Spitze die Gerade OM unter dem Winkel α schneidet und parallel zu DD liegt;

II. wie gross T_1 ist, für $b = \frac{3}{4}a$.

Lösung. I. Man findet leicht

$$T_1 = T - \tfrac{1}{2} b (3a - 2b) M \sin^2 \alpha.$$

II. Diess wird für $b = \frac{3}{4} a$ zu

$$T_1 = T - (\tfrac{3}{4} a \sin \alpha)^2 M,$$

wie es sein muss, weil dann die Achse, auf welche T_1 bezogen ist, den Schwerpunkt in sich enthält.

Aufgabe 192. Ein gerader Cylinder besitzt die Höhe $2h$ und als Basis eine Cycloidenfläche, von welcher AOB (Fig. 18 bei Nr. 153) einer der vier congruenten Quadranten ist.

Man soll, durch Anwendung des für parallele Drehachsen geltenden Satzes (Lösung zu 188) und mit Benutzung der unter Nr. 153 angegebenen Resultate, sein Trägheitsmoment bestimmen

I. für eine Achse UU_1, welche durch den Schwerpunkt geht und dem längsten Durchmesser AA_1 der Basis gleichgerichtet liegt;

II. für eine andere VV_1, ebenfalls durch den Massenmittelpunkt laufende, die dem kürzesten Grundflächendurchmesser BB_1 parallel ist.

Lösung. Wir beziehen den Cylinder auf ein Coordinatensystem, dessen x-Achse mit AA_1, dessen y-Achse mit BB_1 und dessen z-Achse mit der geometrischen des Körpers zusammenfällt. Hierauf zerlegen wir ihn in Schichten, welche die Dicke dz haben und der Grundfläche parallel sind. Dann ergiebt sich leicht

$$T_U = \tfrac{1}{3} \pi \varepsilon a^2 (35 a^2 + 12 h^2) h$$

und

$$T_V = \tfrac{1}{3} \pi \varepsilon a^2 \{(12 \pi^2 - 35) a^2 + 12 h^2\} h,$$

in welchen Gleichungen noch

$$M = 12 \pi \varepsilon a^2 h$$

eingeführt werden kann.

Aufgabe 193. Das Trägheitsmoment T einer Kreisfläche, die den Radius a hat, soll für eine Drehachse AA berechnet werden, welche durch das Centrum O geht und mit der Fläche den Neigungswinkel β bildet. Die Ermittelung von T soll erfolgen, indem man sich den Kreis in unendlich schmale Streifen zerlegt denkt, für einen derselben das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse $A_1 A_1$ bestimmt, welche parallel zu AA durch seinen Schwerpunkt geht, sodann auf AA überträgt (nach Nr. 188) und schliesslich alle diese Momente summirt (integrirt).

ösung. Unter Benutzung von Nr. 145 II und bei Verwendung in der Ebene des Kreises liegenden rechtwinkligen Coordinaten-ns XOY, dessen Abscissenachse die Projection von AA ist, t man leicht zu

$$T = 2 \int_{y=0}^{y=a} (\tfrac{1}{3} x^2 \sin^2\beta + y^2)\, dM$$

amit zuletzt auf

$$T = \tfrac{1}{4} \pi \delta \varepsilon a^4 (1 + \sin^2\beta) = \tfrac{1}{4} a^2 (1 + \sin^2\beta) M,$$

ssen Herleitung die Einführung von Polarcoordinaten sich empfiehlt. Für $\beta = 90^0$ gehen diese Gleichungen über in die sehr bekannte

$$T = \tfrac{1}{2} a^2 M.$$

Aufgabe 194. Man soll, unter Anwendung des für parallele Dreh-n geltenden Satzes (Nr. 188) und mit Benutzung des in der vor-henden Lösung angegebenen Resultates, das Trägheitsmoment T geraden Kreiscylinders (Durchmesser $2a$, Höhe h) für eine UU_1 berechnen, welche durch seinen Schwerpunkt geht und mit asis den Neigungswinkel β einschliesst.

Lösung. Auf dem in den vorigen Lösungen gezeigten Wege er-sich

$$T = \tfrac{1}{12} \{3a^2 (1 + \sin^2\beta) + h^2 \cos^2\beta\} M,$$

ür $\beta = 0^0$ und 90^0 die für den Cylinder allgemein bekannten For-liefert.

Aufgabe 195. Ein schiefer Kreiscylinder hat den Basis-a, die Achsenlänge L und ist unter dem Winkel β gegen seine lfläche geneigt. Welchen Werth besitzt das für seine Achse gel-T?

Lösung. Das unter 193 angegebene Resultat verwendend, hat ogleich

$$T = \tfrac{1}{4} a^2 (1 + \sin^2\beta) M,$$

$$M = \pi \varepsilon a^2 L \sin\alpha$$

Aufgabe 196. Wie 195, doch für den schiefen Kreiskegel; a, L wie dort.

Lösung. Auch hier die Lösung von Nr. 193 benutzend erhält

$$T = \tfrac{1}{20} \pi \varepsilon (1 + \sin^2\beta) \sin\beta\, a^4 L = \tfrac{3}{20} (1 + \sin^2\beta) a^2 M.$$

E. Trägheitsmomente für gegen einander geneigte Achsen.

Aufgabe 197. Auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist ein allgemeiner Körper bezogen. Das Trägheitsmoment T desselben soll für eine Achse OA berechnet werden, welche mit denen der x, y und z die Winkel α, β, γ bildet und durch den Coordinatenanfang O geht.

Lösung. Zunächst ist

$$T = \varepsilon \int\int\int p^2\, dx\, dy\, dz,$$

wenn mit p der senkrechte Abstand von OA für das an der Stelle xyz liegende Element bezeichnet wird.

Drückt man p durch x, y, z, α, β, γ aus und benutzt die Abkürzungen

$$A = \int\int\int (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$
$$B = \int\int\int (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$
$$C = \int\int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$
$$D = \int\int\int yz\, dx\, dy\, dz,$$
$$E = \int\int\int xz\, dx\, dy\, dz,$$
$$F = \int\int\int xy\, dx\, dy\, dz,$$

so entsteht

$$T = \varepsilon \{A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma - 2D \cos\beta \cos\gamma - 2E \cos\alpha \cos\gamma - 2F \cos\alpha \cos\beta\}.$$

Hierbei sind, nach dem in der „Erklärung zu Capitel IV“ Gesagten, die mit ε multiplicirten Integrale A, B und C die auf die drei Coordinatenachsen bezogenen Trägheitsmomente. Diess lehrt auch die letzte Gleichung, wenn man in derselben einen der drei Winkel gleich Null setzt, wobei die beiden anderen zu 90^0 werden.

Aufgabe 198. Es soll mit Benutzung der vorhergehenden Lösung das Trägheitsmoment des Ellipsoids berechnet werden

I. für eine Drehachse, welche durch den Schwerpunkt geht und mit den Halbachsen a, b, c die Winkel α, β, γ bildet;

II. für eine solche, die ebenso geneigt ist, jedoch um k vom Massenmittelpunkte absteht.

Lösung. I. Die Integrale A, B, C sind nach Nr. 183 bekannt; D, E und F ergeben sich zu Null. Daher resultirt

$$T_0 = \tfrac{1}{5}\,(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta + c^2 \sin^2\gamma)\, M.$$

II. Ferner (nach 188)

$$T_k = T_0 + k^2 M.$$

Aufgabe 199. Mit den Kantenlängen $OU = a$, $OV = b$, $OW = c$ ist eine bei O durchaus rechtwinklige, dreiseitige Pyramide construirt worden. Gesucht wird ihr T in Bezug auf eine Drehachse, welche mit den genannten Kanten die Winkel α, β, γ einschliesst und die Spitze O in sich enthält.

Lösung. Nach Nr. 179 kennt man die drei ersten Glieder der hier geltenden letzten Gleichung von 197. Ferner ergiebt sich

$$\varepsilon D = \tfrac{1}{20}\, b c M, \quad \varepsilon E = \tfrac{1}{20}\, a c M, \quad \varepsilon F = \tfrac{1}{20}\, a b M.$$

Daher ist

$$T = \tfrac{1}{10}\,\{(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (a^2 + c^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma$$
$$- b c \cos\beta \cos\gamma - a c \cos\alpha \cos\gamma - a b \cos\alpha \cos\beta\}\, M,$$

was für $\alpha = 0$, oder $\beta = 0$, oder $\gamma = 0$ wieder die nach 179 bekannten einfachen Formeln liefert.

Aufgabe 200. Welches T entsteht, wenn das bei der Lösung von Nr. 197 gefundene Resultat auf den allgemeinen Umdrehungskörper angewendet wird, welcher in 167 näher beschrieben und in Fig. 20 skizzirt wurde?

Lösung. Das Integral A ist nach Nr. 167 bekannt; B und C sind es durch 172; D, E und F verschwinden. Mithin wird

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon\cos^2\alpha \int_{x_0}^{x_1} (y_1^4 - y_0^4)\, dx + \pi\varepsilon\sin^2\alpha \int_{x_0}^{x_1} \{x^2 + \tfrac{1}{4}(y_1^2 + y_0^2)\}(y_1^2 - y_0^2)\, dx$$

oder auch

$$T = \tfrac{1}{4}\pi\varepsilon\,(2 - \sin^2\alpha) \int_{x_0}^{x_1} (y_1^4 - y_0^4)\, dx + \pi\varepsilon\sin^2\alpha \int_{x_0}^{x_1} x^2 (y_1^2 - y_0^2)\, dx,$$

in welchem Ausdrucke man $\sin^2\beta + \sin^2\gamma$ für $2 - \sin^2\alpha$ setzen kann.

Aufgabe 201. Das unter Nr. 200 Ermittelte soll benutzt werden, um für einen geraden Kreiskegel (Höhe h, Basisradius c) das Trägheitsmoment T_1 bezogen auf eine Achse zu berechnen, welche im

Abstande b von der Spitze (nach der Grundfläche hin) die geometri
Achse unter dem Winkel α schneidet.

Lösung. Mit Verwendung des unter Nr. 191 Gefundenen ko
man auf

$$T_1 = \tfrac{1}{20} \{6c^2 - (3c^2 - 12h^2 + 30bh - 20b^2) \sin^2\alpha\} M,$$

was den Einfluss der Grössen α, b, c und h sofort erkennen lässt.

II. Trägheitsmomente ungleichförmig dichter Körper.

Aufgabe 202. Ein gerader Kreiskegel, dessen Basisradi
und dessen Höhe c ist, ändert seine Dichtigkeit ε proportional dem
stande z von der Grundfläche. Für die Einheit des Letzteren i
gleich k.

Man soll das auf die geometrische Achse bezogene T und das
gehörige ϱ durch dreifache Integration bestimmen.

Lösung. Unter Benutzung gemischter (cylindrischer) Coordin
ergiebt sich zunächst

$$T = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \int_0^{\frac{c}{a}(a-r)} z\, dz$$

und hieraus

$$T = \tfrac{1}{60} \pi k a^4 c^2.$$

Da man nun für die Masse

$$M = \tfrac{1}{12} \pi k a^2 c^2$$

findet, so ist

$$T = \tfrac{1}{5} a^2 M,$$

$$\varrho = \tfrac{1}{5} a \sqrt{5} = a \sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

Aufgabe 203. Wie Nr. 202, doch sollen T und ϱ nicht u
Verwendung von Massenelementen mit drei unendlich kleinen Di
sionen hergeleitet werden, sondern indem man sich den Kegel in s
benförmige, parallel zur Basis liegende, Elemente zerlegt denkt, Nr.
auf eines derselben anwendet und die Trägheitsmomente aller di
Scheiben summirt.

Lösung. Das T für eines der genannten Massenelemente,
ches in der Höhe z liegt und den Halbmesser x besitzt, ergiebt sic
$\tfrac{1}{2} \pi k x^4 z\, dz$. Man hat also für den ganzen Kegel

$$T = \tfrac{1}{2}\pi k \int_0^c x^4 z\, dz.$$

Nun folgt das bei 202 Angegebene, nur muss jetzt M auch aus Scheiben zusammengesetzt werden.

Aufgabe 204. Wie Nr. 184, doch ist die Dichtigkeit ε veränderlich und zwar soll T_c berechnet werden

I. unter der Voraussetzung, dass ε sich umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes r von der Kante c ändert und für die Einheit dieser Entfernung gleich k ist;

II. unter der, dass das Dichtigkeitsgesetz ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{kx}{r^2};$$

III. unter der, dass

$$\varepsilon = \frac{ky}{r^2}$$

es darstellt, wobei x und y die senkrechten Abstände von den Ebenen cc_3, bezüglich cc_1, sind.

Lösung.

I. $T_c = \frac{1}{2} kab\,(c_1 + c_3) = \frac{1}{2} kab\,(c + c_2)$.

II. $T_c = \frac{1}{12} ka^2 b\,(3c_3 + 4c_1 - c) = \frac{1}{12} ka^2 b\,(3c_2 + c_1 + 2c)$.

III. $T_c = \frac{1}{12} kab^2\,(4c_3 + 3c_1 - c) = \frac{1}{12} kab^2\,(4c_2 - c_1 + 3c)$.

Aufgabe 205. Die Dichtigkeit ε einer massiven Kugel ändert sich nach concentrischen Schalen derartig, dass sie immer proportional dem Quadrate des Abstandes r vom Mittelpunkte ist und für die Einheit von r den Werth k hat. Der Kugelhalbmesser ist a. Das auf einen Durchmesser bezogene T und das zugehörige ϱ werden gesucht.

Lösung. Bei Verwendung polarer Coordinaten findet man leicht

$$T = \tfrac{8}{21}\pi k a^7.$$

Ferner für die Masse

$$M = \tfrac{4}{5}\pi k a^5,$$

daher

$$T = \tfrac{10}{21} a^2 M,$$

$$\varrho = a\sqrt{\tfrac{10}{21}}.$$

Capitel V.

Aufgaben über die Drehung um eine feste Achse.

Erklärung. Bei der Drehung eines starren Massensystems oder Körpers um eine feste Achse gelten bekanntlich die Beziehungen

$$1)\qquad w = \frac{d\theta}{dt},$$

$$2)\qquad \frac{Qa}{S} = \frac{dw}{dt},$$

für deren letzte auch

$$3)\qquad \frac{Qa}{S} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

oder

$$4)\qquad \frac{Qa}{S} = w\frac{dw}{d\theta}$$

geschrieben werden kann.

In denselben bedeutet w die Winkelgeschwindigkeit, θ den Drehwinkel, t die Zeit, Q diejenige Kraft, welche am Hebelarme a drehend auf das System wirkt, S das Trägheitsmoment des letzteren.

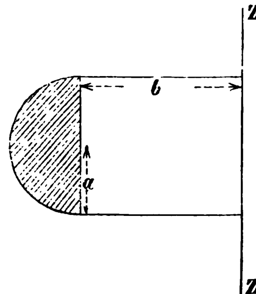
Die vier Gleichungen sind den bei der geradlinigen Bewegung (siehe „Erklärung" zu Capitel I) angeführten ganz entsprechend und lassen sich ebenso wie diese verwenden.

Der Druck, den die Drehachse erleidet, wird bestimmt, indem man die von der festen Verbindung mit derselben herrührenden Widerstände durch Kräfte ersetzt und sodann alle wirkenden Kräfte in Componenten zerlegt parallel zu der x- und y-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt. Es führt nachher die Anwendung der für freie Bewegung geltenden Gesetze (Cap. I) zur Auffindung des Druckes. (Siehe die Aufgaben Nr. 223 bis 231 unter E.)

A. Gegeben eine Beziehung zwischen der drehenden Kraft Q und der Zeit t; einschliesslich: Q constant.

Aufgabe 206. Ein kreisrunder Ring (Schwungrad), dessen Dimensionen und dessen Querschnitt die nebenstehende Figur angiebt, dreht sich um eine Achse ZZ. Er beginnt seine Bewegung mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit c. Es wirkt auf ihn nichts weiter als ein unveränderlicher Widerstand, welcher einer Kraft k gleichkommt, die am Hebelarme h der Bewegung tangential entgegengesetzt thätig ist.

Fig. 23.



Man soll berechnen, wie gross Winkelgeschwindigkeit w und Drehwinkel θ zur Zeit t sind, um welche Zeit T der Ring stehen bleibt und welches die Gesammtdrehung Θ ist.

Lösung. Es sei zur Abkürzung

$$\frac{kh}{S} = A,$$

also (nach Nr. 169 II)

$$A = \frac{60\,kh}{\pi\,\varepsilon\,a^2\,\{16\,a\,(2\,a^2 + 15\,b^2) + 15\,\pi\,b\,(3\,a^2 + 4\,b^2)\}}.$$

Ferner mögen t und θ vom Beginne der Bewegung an gezählt werden, was offenbar das Natürlichste ist.

Die Resultate lauten dann

$$w = c - At,$$
$$\theta = ct - \tfrac{1}{2}At^2,$$
$$T = \frac{c}{A},$$
$$\Theta = \frac{c^2}{2A}.$$

Aufgabe 207. Mit einer verticalen Achse ist durch eine starre, gewichtlose Gerade eine massive Kugel verbunden, welche um c mit ihrem Centrum absteht und den Halbmesser a ($< c$) hat. Tangential zu dem mit c beschriebenen Kreise ist eine Kraft thätig, welche durch das Gewicht einer Wassermenge erzeugt wird, die sich durch Zufluss

regelmässig (der Zeit proportional) vermehrt, anfänglich Null ist und für t gleich 1 das Gewicht k besitzt. Andere Kräfte wirken nicht; desgleichen keine Widerstände.

Berechnet soll werden, welche Winkelgeschwindigkeit w die Kugel zur Zeit t hat und wie gross der Drehwinkel θ in diesem Augenblicke ist — wenn anfänglich keine Geschwindigkeit da war und wenn die Zeit vom Anfangszustande aus gezählt wird.

Lösung. Es ergiebt sich

$$w = \tfrac{1}{2} A t^2$$

und

$$\theta = \tfrac{1}{6} A t^3.$$

Hierbei ist A die Abkürzung für $\frac{kc}{S}$, mithin (nach Nr. 176)

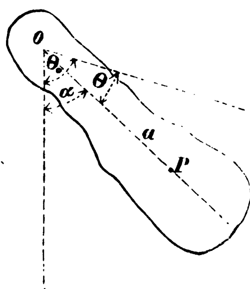
$$A = \frac{5kc}{(2a^2 + 5c^2)M}.$$

Die für w und θ gefundenen Gleichungen sprechen sehr einfache Sätze aus.

B. Gegeben eine Beziehung zwischen der Kraft Q und dem Drehwinkel θ.

Aufgabe 208. Um eine horizontale Achse dreht sich ein ganz allgemeiner Körper nur in Folge seiner Schwere und ohne Widerstände. Massenmittelpunkt und Drehachse liegen um a (Fig. 24) auseinander. Der Körper besitzt die Masse M. Die Bewegung beginnt mit dem Anfangsausschlagwinkel θ_0 und der Anfangswinkelgeschwindigkeit w_0.

Fig. 24.



I. Welche Winkelgeschwindigkeit w hat dieses materielle Pendel für den Ausschlagwinkel $\alpha = \theta_0 - \theta$ und mit welcher (w_1) geht es, falls die Bewegung vom Ruhezustande aus beginnt, durch die verticale Lage?

II. Welche Länge l muss ein mathematisches Pendel erhalten, wenn es eben so schnell schwingen soll, wie jenes physische?

III. Für welchen gegenseitigen Abstand (a) des Schwerpunktes P und der Drehachse O schwingt der Körper am schnellsten, und wie gross ist die zugehörige Länge l des mathematischen Pendels?

Lösung. I. Die Differentialgleichung der Drehbewegung lautet hier

$$w \frac{dw}{d\theta} = \frac{a g M \sin\alpha}{S};$$

aus ihr folgt

$$w = \sqrt{\frac{2 a g M}{S}(\cos\alpha - \cos\theta_0) + w_0^2}$$

und für den genannten besonderen Fall

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{a g M}{S}} \sin \tfrac{1}{2}\theta_0.$$

II. Mit Beachtung des Umstandes, dass

$$v = \sqrt{2 g l (\cos\alpha - \cos\theta_0)}$$

die Geschwindigkeit desjenigen mathematischen Pendels darstellt, welches die Länge l besitzt, folgt dann, dass dieses l gleich sein muss dem Trägheitsmomente des materiellen Pendels, dividirt durch dessen statisches Moment, wenn die Schwingungen gleich schnell erfolgen sollen.

III. Die Schwingungszeit des physischen Pendels ist dann am kürzesten, wenn der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt demjenigen Trägheitshalbmesser k gleichkommt, welcher sich auf eine Gerade bezieht, die, zur Drehachse parallel, durch den Massenmittelpunkt geht.

Das zugehörige mathematische Pendel hat die Länge

$$l = 2k.$$

Aufgabe 209. Ein massiver Kegel (Basishalbmesser b, Höhe h) schwingt um seine Spitze.

I. Wo liegt sein Schwingungsmittelpunkt?

II. Wie lässt sich dessen Lage construiren?

III. Welche Länge muss h haben, wenn $b = \frac{1}{2} h$ ist und der Kegel pro Sekunde entweder

1) einen Pendelschlag, oder

2) einen Hin- und Hergang machen soll?

Lösung. I. Bei Verwendung von Nr. 208 II und 174 erhält man

$$l = \frac{b^2 + 4h^2}{5h}$$

als Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Spitze.

II. Schreibt man diess in der Form

$$l = \frac{4}{5}\left(h + \frac{1}{4}\frac{b^2}{h}\right),$$

so ist die Constructionsweise unmittelbar einleuchtend.

III. Soll pro Sekunde ein Pendelschlag erfolgen, so muss

$$h = \frac{20g}{17\pi^2}$$

sein; das ist (für $\pi = 3{,}14$ und $g = 9{,}81^m$)

$$h = 1{,}167^m,$$

während bekanntlich die Länge des mathematischen Sekundenpendels $0{,}994^m$ beträgt.

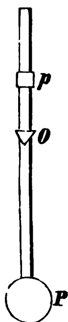
Hingegen hat man

$$h = 0{,}292^m$$

zu nehmen, wenn der Kegel in der Sekunde einen Hin- und Hergang ausführen soll.

Aufgabe 210. Das bekannte Metronom (Fig. 25) besteht aus einem prismatischen Stabe, auf welchem ein Laufgewicht verschiebbar ist und der an seinem unteren Ende mit einer Kugel in fester Verbindung steht. Er schwingt um einen Punkt (eine Schneide) O.

Fig. 25.



Es sei nun f der Querschnitt des Stabes, Q sein Gewicht, b die Entfernung des Drehpunktes O vom oberen Stabende, P das Gewicht der Kugel, k ihr Halbmesser, $a + k$ die Entfernung ihres Centrums von O, endlich h die des laufenden Gewichtes p (welches als materieller Punkt gelten möge) ebenfalls von O.

Gesucht werden

I. die Länge l desjenigen mathematischen Pendels, welches dieselben Schwingungen macht;

II. derjenige Laufgewichtabstand h, bei welchem der Apparat in der Minute n Oscillationen vollbringt.

Lösung. I. Nr. 208 II führt auf

$$l = \frac{P\left[(a+k)^2 + \frac{2}{5}k^2\right] + p h^2 + \frac{1}{3} Q (a^2 - a b + b^2)}{P(a+k) - p h - \frac{1}{2} Q (b - a)},$$

bei dessen Herleitung das Resultat von 176 Anwendung findet.

II. Der gesuchte Laufgewichtabstand h ist durch die quadratische Gleichung

$$\frac{3600\,g}{n^2\pi^2}=\frac{P[(a+k)^2+\frac{2}{5}k^2]+ph^2+\frac{1}{3}Q(a^2-ab+b^2)}{P(a+k)-ph-\frac{1}{2}Q(b-a)}$$

estimmt.

Aufgabe 211. Ein allgemeiner Körper, welcher anfänglich ie Winkelgeschwindigkeit c besessen hat, dreht sich um eine feste Achse, indem er dabei nur dem Einflusse gewisser Widerstände unterliegt, die sich zu einer am Hebelarme a wirkenden Kraft zusammensetzen, welche dem durchlaufenen Drehwinkel θ proportional ist und ir die Einheit desselben den Werth k hat.

Man soll berechnen:

I. welche Winkelgeschwindigkeit w der Körper besitzt, nachdem von ihm der Winkel θ durchlaufen ist;

II. wie viel die gesammte Drehung beträgt;

III. zu welcher Zeit t er ein vorgeschriebenes θ zurückgelegt hat;

IV. in welchem Augenblicke T er stehen bleibt;

V. wie gross Drehwinkel θ und Winkelgeschwindigkeit w zur Zeit t sind;

VI. wie die unter I bis V gefundenen Resultate lauten, wenn der sich drehende Körper ein Ring (Schwungrad) ist, erzeugt durch Rotation eines Rhombus, dessen Diagonalen $AC=2q$, $BD=2p$ sind und dessen Mittelpunkt von der zu AC parallelen Drehachse um d absteht;

VII. wie sie lauten, wenn statt jenes Ringes eine an der Spitze durchaus rechtwinklige, dreiseitige Pyramide vorliegt, deren Seitenkanten die Längen k_1, k_2, k_3 haben und welche sich um eine dieser drei Kanten dreht.

Lösung. Es ergeben sich folgende, meist sehr einfache Sätze ;sprechende Resultate, in denen b die Abkürzung für $\sqrt{\frac{ak}{S}}$ ist:

I) $$w=\sqrt{c^2-b^2\theta^2};$$

II) $$\Theta=\frac{c}{b}$$

Gesammtdrehung;

III) $$t=\frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{b}{c}\,\theta\right);$$

IV) $$T=\frac{\pi}{2b};$$

V)
$$\theta = \frac{c}{b} \sin bt;$$
$$w = c \cos bt.$$

VI. Ist der sich drehende Körper der vorgeschriebene Ring, hat man (nach Nr. 168)

$$b = \sqrt{\frac{2ak}{(p^2 + 2d^2) M}};$$

VII. ist er hingegen die genannte Pyramide, so gilt (nach Nr. 179) für die Drehung um die Kante k_1:

$$b = \sqrt{\frac{10ak}{(k_2^2 + k_3^2) M}};$$

für die um k_2:

$$b = \sqrt{\frac{10ak}{(k_1^2 + k_3^2) M}};$$

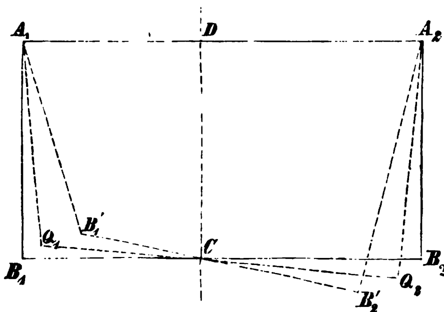
endlich für die um k_3:

$$b = \sqrt{\frac{10ak}{(k_1^2 + k_2^2) M}}.$$

Diese Werthe von b sind in die unter I bis V angegebenen Gleichungen einzuführen.

Aufgabe 212. Ein stabförmiger Körper $B_1 B_2$ (Fig. 26) ist durch zwei Fäden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, deren jeder die Länge a hat, mit den festen Punkten A_1 und A_2 verbunden. (Bifilare Aufhängung.) P ist sein Gewicht, S sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse CD. Der Schwerpunkt liegt in C; CB_1 ist gleich b_1, CB_2 gleich b_2.

Fig. 26.



Der Körper wird aus der ursprünglichen Lage $B_1 B_2$ in die andere $B'_1 B'_2$ gebracht, welche aber von der ersten so wenig abweicht, dass für die Winkel $B_1 C B'_1 = \alpha$, $B_1 A_1 B'_1 = \beta_1$, $B_2 A_2 B'_2 = \beta_2$ der Bogen mit dem Sinus verwechselt werden darf.

Bezeichnet man für irgend eine Stellung $Q_1 Q_2$ des schwingenden Stabes $B_1 C Q_1$ mit θ, $B_1 A_1 Q_1$ mit ε_1, $B_2 A_2 Q_2$ mit ε_2, so ist

$$\varepsilon_1 = \frac{b_1}{a}\theta \text{ und } \varepsilon_2 = \frac{b_2}{a}\theta.$$

er sind die in Q_1 und Q_2 herrschenden Fädenspannungen P_1 ›icht angebbar; desgleichen die tangential zurücktreibenden und R_2.

soll nun (mit Vernachlässigung der Widerstände) berechnen, der Ausschlagwinkel θ zur Zeit t ist, welche Winkelgeschwin- in diesem Augenblicke herrscht, welche Dauer T eine volle Herschwingung hat und wie sich diese Zeit T zu derjenigen T_1 ;ie dem Körper dann eigen sein würde, wenn er pendelför- ehangen wäre.

ung. Für die Spannungen findet man

$$P_1 = \frac{b_2 P}{b_1 + b_2}, \quad P_2 = \frac{b_1 P}{b_1 + b_2};$$

ngential zurücktreibenden Kräfte

$$R_1 = P_1 \sin \varepsilon_1, \quad R_2 = P_2 \sin \varepsilon_2$$

diess durch

$$R_1 = P_1 \varepsilon_1, \quad R_2 = P_2 \varepsilon_2$$

Differentialgleichung der Drehbewegung ergiebt sich

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{b_1 b_2 P}{aS}\theta.$$

1 zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{b_1 b_2 P}{aS}} = k$$

o liefert die Integration dieser Gleichung zunächst

$$\theta = A \sin kt + B \cos kt,$$

$$w = k(B \sin kt - A \cos kt);$$

ıittelung der Werthe der Constanten A und B aber die sehr Bewegungsgesetze

$$\theta = \alpha \cos kt$$

$$w = k\alpha \sin kt.$$

Alles von da an gezählt, wo der Stab die Lage $B'_1 B'_2$ hat.

Hiernach wird θ zu α für $t = 0,\ \frac{2\pi}{k},\ \frac{4\pi}{k}, \ldots$; die Dauer eines Hin- und Herganges ist also

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

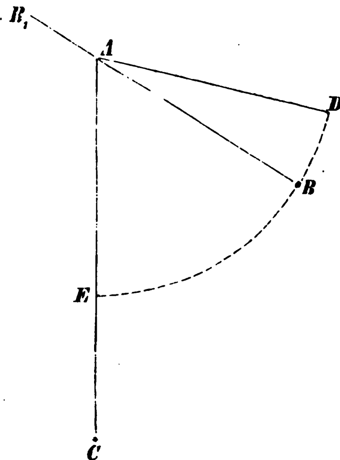
Bezeichnet h für den pendelförmig aufgehangenen Körper den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse, so gilt (wie aus Nr. 208 I gefolgert werden kann) die Beziehung

$$T = \sqrt{\frac{ah}{b_1 b_2}}\, T_1,$$

es ist daher $T = T_1$, wenn h zu $\frac{b_1 b_2}{a}$ wird.

Aufgabe 213. Um eine in A (Fig. 27) senkrecht zur Bildebene stehende Achse dreht sich ein sehr dünner, aber unbiegsamer Stab BB_1, welcher an dem einen Ende B eine kleine Kugel trägt. Er ist so balancirt, dass er sich in der (horizontal zu denkenden) Bildfläche bewegt. Der stabförmige Theil des Apparates übt keinen Einfluss auf die Drehung aus; letztere entsteht vielmehr nur dadurch, dass das Kugelcentrum B nach einem festen Punkte C (der in der Bildebene liegt) proportional der Kugelmasse M und umgekehrt proportional dem Abstande BC angezogen wird. CA ist gleich c, BA gleich a.

Fig. 27.



Der allgemeine Werth der Winkelgeschwindigkeit w des Apparates soll als Function des Ausschlagwinkels $\varepsilon = CAB$ berechnet werden und zwar unter der Voraussetzung, dass die Kugel anfänglich in Ruhe unter dem Winkel $\alpha = CAD$ gestanden habe.

Lösung. Die Differentialgleichung der Drehbewegung ergiebt sich zu

$$w\,dw = \frac{ck^2}{a} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{2ac\cos\varepsilon - a^2 - c^2}\, d\varepsilon.$$

Dabei ist k^2 diejenige Anziehung, welche C auf die Masse 1 in der Entfernung 1 ausübt. Ferner hat man die Kugel so klein vorausgesetzt, dass ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt gedacht werden darf, ihr Trägheitsmoment S also gleich $a^2 M$ ist. [Wäre die Kugel hingegen grösser und r ihr Halbmesser, so müsste, nach Nr. 176, $\frac{1}{5}(5a^2+2r^2)M$ für S genommen werden.]

Aus obiger Gleichung folgt als Gesetz für die Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{k}{a}\sqrt{l\,\frac{a^2+c^2-2ac\cos\alpha}{a^2+c^2-2ac\cos\varepsilon}},$$

das ist so viel wie

$$w = \frac{k}{a}\sqrt{2l\,\frac{CD}{CB}}.$$

Hieraus erhellt sogleich die Natur der Bewegung.

Empfohlen sei es, diese Aufgabe auch als ein „Rollen auf vorgeschriebener Bahn" zu lösen. Es gewährt diess eine Einsicht in den Zusammenhang zwischen denjenigen Gleichungen, die einerseits bei Bewegungen auf festen Bahnen (Capitel III) und andererseits bei Drehbewegungen gelten.

Aufgabe 214. Wie Nr. 213, doch mit folgenden Abweichungen:

Der Theil AB_1 des Apparates fehlt. Die Schwingungen erfolgen um eine in A befindliche horizontale Achse in einer Verticalebene; es soll daher die Wirkung des Kugelgewichtes mit in Rechnung gezogen werden.

Das Centrum C der Anziehung liegt senkrecht unter A.

Lösung. Wird die Kugel wieder so klein vorausgesetzt, dass ihre Masse im Mittelpunkte concentrirt angenommen werden darf, so ist

$$w = \sqrt{\frac{2g}{a}(\cos\varepsilon - \cos\alpha) + \frac{k^2}{a^2}\,l\,\frac{a^2+c^2-2ac\cos\alpha}{a^2+c^2-2ac\cos\varepsilon}}$$

oder

$$w = \sqrt{\frac{2}{a^2}\left\{ag(\cos\varepsilon - \cos\alpha) + k^2 l\,\frac{CD}{CB}\right\}}$$

das Gesetz für die Winkelgeschwindigkeit.

Aufgabe 215. Ein ganz allgemeiner Körper EF (Fig. 28), dessen Trägheitsmoment S man kennt, ist um eine horizontal stehende Achse D drehbar. Auf denselben wirkt nichts weiter als senkrecht nach unten eine Kraft R, welche direct proportional ist der Masse M,

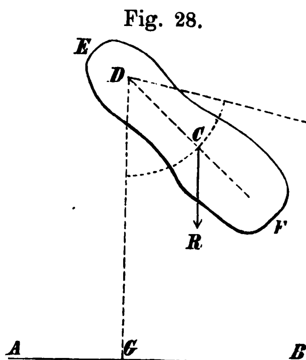


Fig. 28.

hingegen umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes u des Schwerpunktes C von der Horizontalebene AB. Ihr Angriffspunkt ist C und steht um a von D ab. Für M gleich 1 und u gleich 1 besitzt R die Intensität k.

Anfänglich befindet sich der Körper in Ruhe und liegt derartig gegen AB, dass die Verbindungsgerade der Punkte D und C den Winkel α mit der Senkrechten DG bildet. Die Länge der Letzteren ist b.

Berechnet soll werden, welche Winkelgeschwindigkeit w für den Ausschlag $\varepsilon = GDC$ herrscht.

Lösung. Man findet

$$w = \sqrt{\frac{2kM}{S}\left(\frac{1}{b - a\cos\varepsilon} - \frac{1}{b - a\cos\alpha}\right)},$$

wobei die geometrische Bedeutung der Nenner der Brüche beachtet werden möge.

Aufgabe 216. Die Kraft R (Fig. 28) soll wieder proportional der Masse sein, hingegen umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes u. Ausserdem möge die Schwere des Körpers mit in die Rechnung gezogen werden; alles Uebrige aber sei wie bei der vorigen Aufgabe.

Zu berechnen sind

I. die Winkelgeschwindigkeit w als Function des Ausschlages $\varepsilon = GDC$;

II. diejenige (w_1), mit welcher die Senkrechte DG speciell dann durchlaufen wird, wenn b das Doppelte des Abstandes zwischen Drehachse und Schwerpunkt ist, und wenn der Körper sich anfänglich in horizontaler Lage befand.

Lösung. Es ergiebt sich

$$w^2 = \frac{2aM}{S}\left\{\frac{k}{2a}\left[\frac{1}{(b - a\cos\varepsilon)^2} - \frac{1}{(b - a\cos\alpha)^2}\right] + g\,(\cos\varepsilon - \cos\alpha)\right\}$$

und

$$w_1^2 = \frac{2aM}{S}\left(\frac{3k}{8a^3} + g\right).$$

C. Gegeben eine Beziehung zwischen der drehenden Kraft Q und der Winkelgeschwindigkeit w.

Aufgabe 217. Ein aus den Halbachsen a, b und c construirtes Ellipsoid hat einen Stoss erhalten, welchem zu Folge es sich mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit γ um seine c-Achse dreht. Die Widerstände der Bewegung geben zusammen eine am Ende der Halbachse a tangential wirkende Resultante W, welche mit der Winkelgeschwindigkeit w in gleichem Verhältnisse wächst und für die Einheit der letzteren den Werth k hat.

Man soll ermitteln

I. wie gross w zur Zeit t ist;

II. welcher Drehwinkel θ in t Zeiteinheiten durchlaufen wird;

III. was aus den erhaltenen Formeln für w und θ folgt.

Lösung. Bei Benutzung der Abkürzung

$$\alpha = \frac{a\,k}{S}$$

lauten die Resultate:

I. $$w = \gamma\, e^{-\alpha t}$$

und

II. $$\theta = \frac{\gamma}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}),$$

wobei (nach Nr. 183) das Trägheitsmoment

$$S = \tfrac{4}{15}\,\pi\,\varepsilon\,a\,b\,c\,(a^2 + b^2)$$

ist.

III. Die für w gefundene Gleichung lehrt, dass die Winkelgeschwindigkeit zwar immer abnimmt, jedoch erst nach unendlich langer Zeit zu Null wird.

Aus dem Werthe von θ folgt, dass der Drehwinkel sich mehr und mehr der Grenze $\frac{\gamma}{\alpha}$ nähert.

Zwischen w und θ besteht die einfache Beziehung

$$w = \gamma - \alpha\,\theta.$$

Aufgabe 218. Mit einer starren, verticalen Drehachse OZ sind drei materielle Punkte P_1, P_2, P_3, welche die Massen m_1, m_2, m_3 haben, in fester Verbindung durch die unveränderlichen Geraden

r_1, r_2, r_3. In einer Ebene, welche (ebenso wie r_1, r_2, r_3) senkrecht zu OZ steht, wirkt eine Kraft A tangential zu einem mit a um die Drehachse construirten Kreise. Diese Kraft ist constant, es stellen sich jedoch der Bewegung Widerstände entgegen, die proportional dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit w zunehmen, so dass die Drehung durch

$$Q = A - k w^2$$

erfolgt. Sie beginnt zur Zeit Null vom Ruhezustande aus.

Gesucht werden die Winkelgeschwindigkeit w und der Drehwinkel θ zur Zeit t.

Lösung. Als Gesetz für die Winkelgeschwindigkeit erhält man:

$$w = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{e^{2\alpha\beta t} - 1}{e^{2\alpha\beta t} + 1}$$

oder

$$w = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha\beta t} - e^{-\alpha\beta t}}{e^{\alpha\beta t} + e^{-\alpha\beta t}};$$

als solches für den Drehwinkel:

$$\theta = \frac{1}{\alpha^2 \beta} l \frac{e^{\alpha\beta t} + e^{-\alpha\beta t}}{2}.$$

Dabei ist

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{A}},$$

$$\beta = \frac{A a}{S},$$

$$S = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2.$$

Den für w und θ gefundenen Werthen können leicht Folgerungen und Untersuchungen angeschlossen werden, welche den bei Nr. 32 stehenden entsprechen. Es sei hiermit auf diese verwiesen.

Aufgabe 219. Ein allgemein gestalteter Körper, dessen Trägheitsmoment S man kennt, dreht sich um eine Achse in Folge eines Stosses, den er zur Zeit Null erhielt und welcher ihm die Anfangswinkelgeschwindigkeit γ ertheilte.

Die Widerstände der Bewegung geben zusammen eine am Hebelarme a wirkende Resultante W, welche aus einem constanten Theile A und aus einem veränderlichen besteht, der dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit w so proportional ist, dass er für $w = 1$ die Stärke B hat.

Es soll berechnet werden

I. wie gross w zur Zeit t ist;

II. welcher Drehwinkel θ bis zu diesem Augenblicke durchlaufen wird;

III. welche Zeit T verstreicht, bis der Körper stehen bleibt;

IV. wie gross hierbei der Drehwinkel Θ ist;

V. wie sich aus den für w und θ unter I. und II. gefundenen Ausdrücken die einfacheren herleiten lassen, welche dann gelten, wenn nur der constante erste Theil des Widerstandes wirkt;

VI. wie die unter I. bis V. gefundenen Resultate lauten, wenn der Körper ein gerader, hohler Kreiscylinder ist, der sich um seine geometrische Achse dreht, den äusseren Halbmesser a, den inneren b und die Höhe $\frac{1}{4}\,a$ hat.

Lösung. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{B}{A} = \alpha^2,$$

$$\frac{A\,a}{S} = \beta,$$

so resultirt Folgendes:

I. $$w = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha\,\gamma \cos\alpha\,\beta\,t - \sin\alpha\,\beta\,t}{\cos\alpha\,\beta\,t + \alpha\,\gamma\sin\alpha\,\beta\,t};$$

II. $$\theta = \frac{1}{\alpha^2\,\beta}\, l\,(\cos\alpha\,\beta\,t + \alpha\,\gamma\sin\alpha\,\beta\,t);$$

III. $$T = \frac{1}{\alpha\,\beta} \operatorname{arctan} \alpha\,\gamma;$$

IV. $$\Theta = \frac{1}{2\,\alpha^2\,\beta}\, l\,(1 + \alpha^2\,\gamma^2);$$

V. $$w = \gamma - \beta\,t \quad \text{und} \quad \theta = \gamma\,t - \tfrac{1}{2}\,\beta\,t^2.$$

In Bezug auf die Herleitung dieser letzten Sätze möge IV. unter Nr. 33 verglichen werden.

VI. Für den genannten Hohlcylinder ist

$$\beta = \frac{8\,A}{\pi\,\varepsilon\,(a^4 - b^4)};$$

diess würde in die vorhergehenden Gleichungen einzuführen sein.

D. Gegeben eine Beziehung zwischen w und t, oder zwischen w und θ, oder endlich zwischen θ und t.

Aufgabe 220. Aus den Halbachsen a und b ist eine elliptische Scheibe so dünn construirt worden, dass sie als Fläche gelten kann. Sie soll sich um ihre grosse Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit w drehen, welche immer der dritten Potenz der verflossenen Zeit t proportional ist und für die Einheit derselben den Werth k hat.

I. Welcher Art muss diejenige Kraft Q sein, die, an dem von der kleinen Halbachse b beschriebenen Kreise tangential wirkend, diese Bewegung erzeugt?

II. Wie verhalten sich die in verschiedenen Zeiten durchlaufenen (und von $t = 0$ an gerechneten) Drehwinkel zu einander?

Lösung. I. Die gesuchte Kraft muss dem Quadrate der verflossenen Zeit proportional sein und für $t = 1$ die Intensität $\frac{3}{4}\, b k M$ haben (wobei M die Masse der Scheibe bedeutet).

II. Die durchlaufenen Drehwinkel verhalten sich wie die vierten Potenzen der verstrichenen Zeiten; es ergiebt sich nämlich leicht, dass

$$\theta = \tfrac{1}{4}\, k t^4$$

ist.

Aufgabe 221. Ein Körper, welchem das Trägheitsmoment S zukommt, dreht sich um eine Achse D, in Folge der Wirkung einer unbekannten Kraft Q, die immer tangential zu einem mit h um D beschriebenen Kreise thätig ist. Zwischen dem durchlaufenen Drehwinkel θ und der Winkelgeschwindigkeit w besteht die Beziehung

$$\theta = \frac{1}{B^2}\left(A\, l\, \frac{A}{A - Bw} - Bw\right),$$

in welcher A und B constante Grössen sind.

Man soll berechnen, welcher Art die Kraft Q ist.

Lösung. Die die Drehung hervorrufende Kraft Q besteht erstens aus einem unveränderlichen Theile $\frac{AS}{h}$ und zweitens aus einem anderen, welcher der Winkelgeschwindigkeit proportional ist, nämlich $\frac{BS}{h} w$. Letzterer ist negativ, man kann also sagen: es wirkt eine constante Kraft und ein der Winkelgeschwindigkeit proportionaler Widerstand.

Aufgabe 222. Mit dem äusseren Halbmesser a, dem inneren b und der Höhe $\frac{1}{4}a$ ist ein gerader, hohler Kreiscylinder gebildet worden. Er dreht sich um seine geometrische Achse in Folge eines Stosses, den er zur Zeit Null erhielt und der ihm die Anfangswinkelgeschwindigkeit γ ertheilte. Die Widerstände der Bewegung geben zusammen eine an der äusseren Peripherie tangential wirkende Resultante W, welche in einer nicht bekannten Art von der Winkelgeschwindigkeit w abhängt. Die Drehung erfolgt derartig, dass der durchlaufene Winkel θ zu jeder Zeit t den Werth

$$\theta = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{A}{B}}\, l\left(\cos Ct + \gamma\sqrt{\frac{B}{A}}\sin Ct\right)$$

hat, worin A und B zwei Constanten sind, C aber die Abkürzung für $\frac{8\sqrt{AB}}{\pi\,\varepsilon\,(a^4 - b^4)}$ ist.

In welcher Weise hängt der Widerstand W von der Winkelgeschwindigkeit, von A und von B ab?

Lösung. Es ergiebt sich

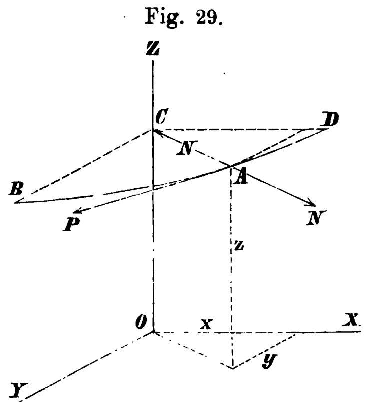
$$W = A + Bw^2;$$

der Widerstand besteht also aus einem constanten Theile A und aus einem solchen, der wie die Quadrate der Winkelgeschwindigkeit zunimmt, für $w = 1$ aber die Stärke B hat.

E. Aufgaben über die Berechnung des von der Drehachse auszuhaltenden Druckes.

Aufgabe 223. Ein mit der Masse m versehener Punkt A (Fig. 29) ist mit der Drehachse OZ durch die gewichtlose, starre Gerade $CA = r$ verbunden. Es wirkt auf ihn die Kraft P tangential zu dem mit r um OZ beschriebenen Kreise BAD. Der von der Drehachse erlittene Druck N (oder, was dem absoluten Werthe nach dasselbe ist, der von ihr geleistete Widerstand) soll berechnet werden.

Fig. 29.



Lösung. Zerlegt man (dem am Schlusse der „Einleitung“ zu Capitel V Gesagten folgend) P in zwei Componenten X und Y, welche im Sinne der positiven x,

bezüglich in dem der positiven y wirken, ferner N in zwei (U und V), die in dem der negativen beiden Coordinaten thätig sind, so ergiebt sich sogleich

$$U = X - m\frac{d^2(r\cos\theta)}{dt^2}$$

und

$$V = Y - m\frac{d^2(r\sin\theta)}{dt^2},$$

wobei θ der Drehwinkel DCA ist.

Hieraus folgt, wenn die Winkelgeschwindigkeit w eingeführt wird,

$$1)\qquad U = X + mr\left(w^2\cos\theta + \sin\theta\frac{dw}{dt}\right),$$

$$2)\qquad V = Y + mr\left(w^2\sin\theta - \cos\theta\frac{dw}{dt}\right),$$

oder auch

$$3)\qquad U = X + m\left(w^2 x + y\frac{dw}{dt}\right),$$

$$4)\qquad V = Y + m\left(w^2 y - x\frac{dw}{dt}\right).$$

Man hat also auch den Achsendruck selbst, nämlich

$$N = \sqrt{U^2 + V^2}.$$

Aufgabe 224. Es wirken mehrere Massen, nämlich m_1, m_2, m_3, ... m_n an den Hebelarmen r_1, r_2, r_3, ... r_n, beeinflusst von den Kräften P_1, P_2, P_3, ... P_n. Alles Uebrige ist wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

I. Welche Werthe haben hier die Componenten U und V des von der Drehachse auszuhaltenden Druckes?

II. Wo greifen sie an?

III. Was ändert sich, wenn das Massensystem ein stetig zusammenhängendes (ein Körper) wird?

IV. Unter welchen Umständen erleidet die Achse OZ (Fig. 29) bei der Drehung denselben Druck, wie während der Ruhe?

Lösung. I. Unter Beibehaltung der in der vorigen Lösung benutzten Bezeichnungen, findet man

$$1)\qquad U = \Sigma(X) + w^2\,\Sigma(mx) + \frac{dw}{dt}\,\Sigma(my),$$

$$2)\qquad V = \Sigma(Y) + w^2\,\Sigma(my) - \frac{dw}{dt}\,\Sigma(mx).$$

II. Die Abstände z_u und z_v der Angriffspunkte dieser Kräfte U und V von der xy-Ebene ergeben sich aus den Momentegleichungen

$$3)\qquad U z_u = \Sigma(Xz) + w^2\,\Sigma(mxz) + \frac{dw}{dt}\,\Sigma(myz)$$

und

$$4)\qquad V z_v = \Sigma(Yz) + w^2\,\Sigma(myz) - \frac{dw}{dt}\,\Sigma(mxz)$$

im Vereine mit 1) und 2).

III. Ist das System ein stetig zusammenhängendes (ein Körper), so wird m zum Massenelemente ($\varepsilon\,dx\,dy\,dz$) und die Summen in den beiden letzten Gliedern gehen in Integrale über. Man hat daher

$$5)\quad U = \Sigma(X) + w^2\int\!\!\int\!\!\int x\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz + \frac{dw}{dt}\int\!\!\int\!\!\int y\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz,$$

$$6)\quad V = \Sigma(Y) + w^2\int\!\!\int\!\!\int y\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz - \frac{dw}{dt}\int\!\!\int\!\!\int x\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz,$$

$$7)\quad U z_u = \Sigma(Xz) + w^2\int\!\!\int\!\!\int xz\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz + \frac{dw}{dt}\int\!\!\int\!\!\int yz\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz,$$

$$8)\quad V z_v = \Sigma(Yz) + w^2\int\!\!\int\!\!\int yz\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz - \frac{dw}{dt}\int\!\!\int\!\!\int xz\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz.$$

Wirken auf alle Punkte des Körpers Kräfte, so werden auch die in den ersten Gliedern stehenden Summen noch zu Integralen.

Bezeichnet man mit M die Gesammtmasse des stetig zusammenhängenden Systems, mit ξ, η und ζ die Coordinaten seines Schwerpunktes, mit D und E die bei den Trägheitsmomenten (Aufgabe 197) schon vorgekommenen Integrale

$$\int\!\!\int\!\!\int yz\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz \quad\text{und}\quad \int\!\!\int\!\!\int xz\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz,$$

so lauten die Gleichungen 5) bis 8) einfacher

$$9)\qquad U = \Sigma(X) + w^2 M\xi + \frac{dw}{dt} M\eta,$$

$$10)\qquad V = \Sigma(Y) + w^2 M\eta - \frac{dw}{dt} M\xi,$$

$$11)\qquad U z_u = \Sigma(Xz) + w^2 E + \frac{dw}{dt} D,$$

$$12)\qquad V z_v = \Sigma(Yz) + w^2 D - \frac{dw}{dt} E.$$

IV. Der Druck wird während der Bewegung eben so stark sein, wie während der Ruhe, wenn die Achse OZ eine der Hauptachsen des Körpers ist; dann sind nämlich ξ, η, D und E gleich Null.

Aufgabe 225. Eine kleine Kugel A (Fig. 29), die als Punkt von der Masse 1 aufgefasst werden darf, ist durch eine starre, gewichtlose Gerade AC mit einer Drehachse OZ verbunden. Sie bewegt sich anfänglich mit der Winkelgeschwindigkeit 1 um diese Achse und unterliegt keiner anderen Kraftwirkung als einem Mittelwiderstande, welcher dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist und ursprünglich die Intensität k besass. AC ist der Einheit gleich.

Man soll mit Benutzung der Lösung der Aufgabe 223 den Druck N, welchen die Drehachse erleidet,

I. als Function des von der Anfangslage aus gezählten Drehwinkels θ berechnen,

II. als Function der vom Bewegungsbeginne ab genommenen Zeit t.

Lösung. Die unter Nr. 223 entwickelten Gleichungen 1) und 2) liefern Folgendes:

Der Druck N verändert sich nach den Gesetzen

$$N = e^{-2k\theta} = w^2$$

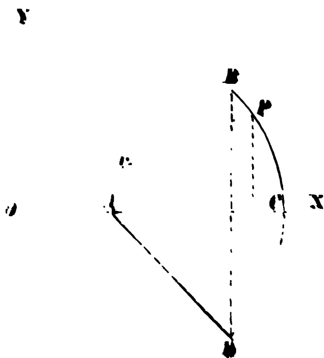
oder

$$N = \frac{1}{(1+kt)^2};$$

er ist also anfänglich gleich 1, nimmt stets ab, wird aber erst für unendlich grosse Drehwinkel zu Null.

Aufgabe 226. Der Kreisbogen BCD (Fig. 30) dreht sich um eine Achse, die in O senkrecht zu seiner Ebene steht; mit der Winkelgeschwindigkeit w, ohne dass Kräfte oder Widerstände auf ihn wirken. Das Centrum A liegt um a von O entfernt, der Halbmesser ist c, der Centriwinkel 2α, der Querschnitt überall q, die Dichtigkeit durchweg ε.

Fig. 30.



Der Achsendruck N soll ermittelt werden

I. mit Benutzung der unter Nr. 224 abgeleiteten Gleichungen,

II. ohne dieselben.

Lösung. I. Nach Nr. 224 rechnend, findet man

$$N = w^2 M \xi,$$

(selbstverständlich in der Ebene des Kreisbogens angreifend), das ist (Theil I, Aufg. 50) so viel wie

$$N = w^2 M \frac{a\alpha + c \sin\alpha}{\alpha},$$

wobei $M = 2cq\alpha\varepsilon$.

II. Dasselbe ergiebt sich, wenn man für ein allgemein liegendes Massenelement P des Bogens die Centrifugalkraft bestimmt, letztere in zwei auf einander rechtwinklig stehende Componenten zerlegt und diese Seitenkräfte für alle Elemente addirt (integrirt).

Aufgabe 227. Wie Nr. 226, doch dreht sich statt des Kreisbogens BCD das gleichnamige Segment, welches die Dicke δ hat.

Lösung. Die unter I. und II. der vorhergehenden Nummer angegebenen Wege führen beide auf

$$N = w^2 M \xi$$

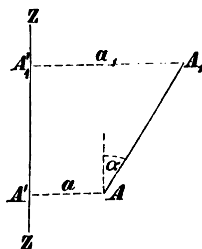
oder, näher ausgeführt, auf

$$N = \tfrac{1}{6} c^2 w^2 \delta \varepsilon \, [3\, a\, (2\, \alpha - \sin 2\, \alpha) + 4\, c \sin^3 \alpha],$$

welcher Druck selbstverständlich in der Ebene des Kreisabschnittes wirkt.

Aufgabe 228. Um eine verticale Achse ZZ (Fig. 31) dreht sich ein Stab AA_1, welcher mit ihr in derselben Ebene liegt. Seine Länge ist L, seine Dichtigkeit constant gleich ε, sein Querschnitt q ebenfalls unveränderlich und so klein, dass der Stab als materielle Gerade aufgefasst werden darf. Es wirken keine Kräfte oder Widerstände.

Fig. 31.



Man soll mit Benutzung der Lösung der Aufgabe 224 den auf die Achse wirkenden Druck N nach Grösse und Angriffspunkt bestimmen.

Lösung. Die letzten vier unter der genannten Nummer angegebenen Gleichungen (in denen E hier ein einfaches Integral ist) liefern

$$N = \tfrac{1}{2} w^2 M (a + a_1),$$

angreifend in der von A' aus gerechneten Höhe

$$z_u = \tfrac{1}{3} L \cos\alpha \, \frac{a + 2\, a_1}{a + a_1}.$$

Die Richtung des Druckes geht sonach im Allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt des Stabes AA_1, sondern durch den des Trapezes $A'A'_1A_1A$. Nur dann, wenn der Stab parallel, oder senkrecht zur Drehachse liegt, befinden sich beide Massenmittelpunkte in derselben Horizontale.

Aufgabe 229. Eine elliptische Scheibe, deren Dicke δ und Dichtigkeit ε unveränderlich sind, dreht sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit w um eine Gerade, welche, dem grössten Durchmesser parallel, in derselben Ebene liegt. Die Halbachsen der Ellipse sind a und b; der Mittelpunkt steht um k von der Drehachse ab.

Der von der Letzteren erlittene Druck N soll berechnet werden

I. mit Anwendung der unter Nr. 224 stehenden Gleichungen,

II. ohne diese.

Lösung. I. Nach Nr. 224 findet man

$$N = w^2 Mk,$$

der Richtung nach zusammenfallend mit derjenigen Geraden, welche, senkrecht zur Drehachse stehend, durch den Scheibenmittelpunkt geht. M ist dabei die Masse, also gleich $ab\pi\delta\varepsilon$.

II. Zu denselben Resultaten gelangt man auch ohne Anwendung jener Formeln, wenn man für ein Scheibenelement die Centrifugalkraft berechnet und alle diese Kräfte summirt. Es entsteht dabei ein Doppelintegral, dessen Werth sehr leicht ermittelt werden kann.

Aufgabe 230. Wie Nr. 229, nur liegt statt der elliptischen Scheibe eine massive Kugel vor, welche den Halbmesser a hat.

Lösung. Es ergiebt sich abermals

$$N = w^2 Mk,$$

wiederum so angreifend, als ob die Kugelmasse ($M = \frac{4}{3}\pi\varepsilon a^3$) im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Wie bei der Lösung der vorigen Aufgabe folgen diese Ergebnisse sowohl aus den unter Nr. 224 angegebenen Gleichungen, als auch dann, wenn man N durch Addition (dreifache Integration) der Centrifugalkräfte aller Kugelelemente berechnet.

Aufgabe 231. Um eine verticale Achse dreht sich ein Stab AA_1, der nicht in derselben Ebene liegt (der also kreuzt) mit der Winkelgeschwindigkeit w. Seine Länge ist $= L$, seine Dichtigkeit constant $= \varepsilon$, sein Querschnitt q ebenfalls unveränderlich und so klein, dass der Stab als materielle Gerade aufgefasst werden darf. Er wird auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Achse mit der Drehachse zu-

sammenfällt, derartig bezogen, dass A in der xy-Ebene liegt, bestimmt durch die Abscisse a und die Ordinate b, dass endlich A_1 in die xz-Ebene fällt, durch die Coordinaten a_1 und c daselbst seiner Lage nach bezeichnet.

Weder Kräfte noch Widerstände wirken.

Unter Benutzung der Lösung von Nr. 224 sollen die Druckcomponenten U und V nach Grösse und Angriffspunkt berechnet werden; auch soll man angeben, wie sie sich zusammensetzen lassen.

Lösung. Die Gleichungen 9) und 10) unter Nr. 224 liefern

$$U = \frac{1}{2} w^2 M (a + a_1)$$

und

$$V = \frac{1}{2} w^2 M b,$$

wobei $M = \varepsilon q L$ ist.

Bei der Bestimmung von z_u kommt man auf das Integral

$$E = \varepsilon q \sec\gamma \int_0^c \left(a + \frac{a_1 - a}{c} z\right) z\, dz$$

(in welchem γ den Winkel bezeichnet, den der Stab mit der Drehachse bildet) und findet schliesslich

$$z_u = \frac{1}{3} c \frac{a + 2a_1}{a + a_1} = \frac{1}{3} L \cos\gamma \frac{a + 2a_1}{a + a_1}.$$

Ebenso führt die Ermittelung von z_v zu dem Integrale

$$D = \varepsilon q \sec\gamma \int_0^c \frac{b\,(c - z)}{c} z\, dz$$

und somit auf

$$z_v = \frac{1}{3} c = \frac{1}{3} L \cos\gamma.$$

Da z_u und z_v verschieden sind, so lassen sich U und V nicht durch eine Einzelkraft ersetzen, wohl aber durch eine Kraft und ein Paar. Verlegt man nämlich U und V als U' und V' an den Schwerpunkt des Stabes, so liefern sie daselbst die Resultante

$$R = \frac{1}{2} w^2 M \sqrt{(a + a_1)^2 + b^2}$$

und zwei Kräftepaare $U U'_1$ und $V V'_1$.

Die senkrecht zu den Kräfterichtungen gemessenen Breiten dieser Letzteren sind

$$h_u = \frac{1}{6} L \frac{a - a_1}{a + a_1} \sin\alpha,$$

bezüglich

$$h_v = \tfrac{1}{6} L \sin \beta,$$

wenn durch α und β diejenigen Winkel bezeichnet werden, welche der Stab mit der Achse der x, bezüglich mit der der y, bildet.

Mithin hat man als Momente dieser Paare

$$U h_u = \tfrac{1}{12} n^2 M L (a + a_1) \sin \alpha$$

und

$$V h_v = \tfrac{1}{12} n^2 M L\, b \sin \beta,$$

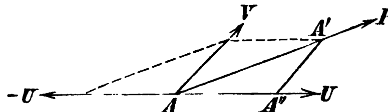
wonach nun beide noch vereinigt werden können.

Capitel VI.

Aufgaben über allgemeinere Bewegungen von Punktesystemen.

Erklärung. Es sei A (Fig. 32) einer der Punkte eines Systemes, in welchem gewisse feste Verbindungen bestehen; er werde von einer Kraft P beeinflusst, die ihn in der Zeit dt von A nach A' treiben würde, wenn er frei wäre. Die wirklich eintretende Bewegung sei die von A nach A'', und U die sie erzeugende „wirksame Kraft".

Fig. 32.



Man kann sich dann P zerlegt denken in die Componenten U und V, von denen die letztere die „verlorene Kraft" heisst.

Dieselbe Zerlegung ist an den übrigen Systempunkten möglich, auf welche die Kräfte P_1, P_2, ... wirken; man erhält daher die „wirksamen Kräfte" U, U_1, U_2, ... und die „verlorenen" V, V_1, V_2, ...

Die Punkte bewegen sich nun so, als ob sie frei wären und nur von den Kräften U, U_1, U_2, ... beeinflusst würden. Diess ist aber nur möglich, wenn die V, V_1, V_2, ... sich gegenseitig aufheben. Hierin liegt das „d'Alembert'sche Princip" oder das sogenannte „Princip der verlorenen Kräfte", nämlich der Satz:

Die Bewegung eines beliebigen Systemes von Punkten, die irgend wie mit einander verbunden sind und von irgend welchen Kräften beeinflusst werden, erfolgt stets derartig, dass die in jedem Augenblicke verlorenen Kräfte im Gleichgewichte stehen.

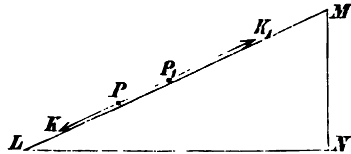
Oder auch, wie sofort aus Fig. 32 erhellt:

Die Bewegung geschieht stets so, dass in jedem Augenblicke Gleichgewicht stattfindet zwischen den gegebenen Kräften (P, P_1, P_2, ...) und denen, welche den wirksamen gleich und entgegengesetzt sind.

Mittelst dieses Principes, welches bei der Lösung der nachfolgenden Aufgaben als bekannt vorausgesetzt wird, lässt sich die Bewegung eines Systemes auf sein Gleichgewicht zurückführen, also die Dynamik auf die Statik.

Aufgabe 232. Auf einer schiefen Ebene, die durch das Dreieck LMN (Fig. 33) dargestellt ist, befinden sich zwei Punkte P und P_1 (kleine Kugeln), welche die Massen m und m_1 haben und mittelst eines undehnbaren Fadens verbunden sind. Auf den Ersten wirkt, ausser seiner Schwere, eine unveränderliche Kraft K in der Richtung von M nach L, auf den Zweiten (ausser der Schwere) eine ebenfalls constante K_1 von L nach M zu.

Fig. 33.



Die Bewegung beginnt vom Ruhezustande aus zur Zeit Null, zu welcher sich P in L befindet, und erfolgt aufwärts. Widerstände liegen nicht vor. Die Ebene ist unter dem Winkel $\alpha = MLN$ gegen den Horizont geneigt.

Man soll, unter Bestimmung der „verloren gehenden Kräfte“ (s. „Erklärung“), mit Hilfe des d'Alembert'schen Principes berechnen:

I. welche Geschwindigkeit v das Punktesystem zur Zeit t hat und welcher Weg x von ihm während derselben zurückgelegt wurde;

II. wie gross die in dem Faden herrschende Spannung T ist.

Lösung. I. Die verlorene Kraft ist für m:

$$V = -K - mg\sin\alpha - m\frac{dv}{dt};$$

hingegen für m_1:

$$V_1 = K_1 - m_1 g\sin\alpha - m_1\frac{dv}{dt}.$$

Hieraus folgt

$$v = Bt,$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{K_1 - K - g(m + m_1)\sin\alpha}{m + m_1} = B$$

gesetzt wird.

Ferner

$$x = \tfrac{1}{2}Bt^2.$$

II. Als Fadenspannung ergiebt sich

$$T = \frac{K_1 m + K m_1}{m + m_1}.$$

Die für v, x und T gefundenen Gleichungen enthalten hübsche einfache Sätze.

Aufgabe 233. Wie Nr. 232; jeder der beiden Punkte P und P_1 wird aber auch noch von einer Kraft beeinflusst, welche der Masse und der Geschwindigkeit proportional ist, für mv oder $m_1 v = 1$ die Intensität A hat und in dem der Bewegungsrichtung entgegengesetzten Sinne wirkt.

In der bei der vorhergehenden Aufgabe bezeichneten Weise soll man die Geschwindigkeit v, den zurückgelegten Weg x und die Fadenspannung T als Functionen der Zeit t berechnen, endlich auch aus den für v, x und T gefundenen Werthen diejenigen herleiten, welche dann gelten, wenn A gleich Null ist.

Lösung. Zunächst ergiebt sich als Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{dv}{dt} + Av - B = 0,$$

wobei B dieselbe Bedeutung hat wie in der vorhergehenden Lösung. Durch Integration folgt

$$v = \frac{B}{A}(1 - e^{-At});$$

es nähert sich hiernach die Geschwindigkeit für in's Unendliche wachsende t der Grenze $\frac{B}{A}$, die Bewegung geht also mehr und mehr in eine gleichförmige über.

Der von dem Punktesysteme zurückgelegte Weg ist

$$x = \frac{B}{A^2}(At + e^{-At} - 1);$$

die im Faden herrschende Spannung:

$$T = \frac{K_1 m + K m_1}{m + m_1}.$$

Setzt man in den für v und x gefundenen Werthen A gleich Null, so ergeben sich zunächst vieldeutige Formen, bei näherer Untersuchung derselben jedoch die bei der vorhergehenden Lösung (232) angegebenen Resultate.

Die Spannung ist von A unabhängig.

Aufgabe 234. In einem Systeme von Punkten, deren Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ gegeben sind, bestehen gewisse bekannte feste Verbindungen. Auf die Massenelemente wirken an den einzelnen Punkten, im Sinne der positiven Coordinaten eines rechtwinkligen Systemes, die beschleunigenden Kräfte

$$X_1, \; Y_1, \; Z_1,$$
$$X_2, \; Y_2, \; Z_2,$$
etc.

Zur Zeit t, welche vom Beginne der Bewegung an gezählt wird, befinden sich die Systempunkte an den Stellen

$$x_1, \; y_1, \; z_1,$$
$$x_2, \; y_2, \; z_2,$$
etc.

I. Mit Benutzung des d'Alembert'schen Principes und der sechs allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts (Theil I: Erklärung zu Capitel IV) sollen diejenigen sechs allgemeinen Gleichungen der Bewegung, welche für dieses Punktesystem Giltigkeit haben müssen, abgeleitet werden;

II. soll man angeben, was dieselben aussprechen.

Lösung. I. Die von dem ganzen Systeme verlorenen Kräfte ergeben sich (im Sinne der drei Coordinatenachsen genommen) zu

$$\sum \left\{ m\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \right\},$$

$$\sum \left\{ m\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \right\},$$

$$\sum \left\{ m\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \right\};$$

die gesuchten Gleichungen der Bewegung lauten daher:

$$\sum \left\{ m\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) \right\} = 0,$$

$$\sum \left\{ m\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \right\} = 0,$$

$$\sum \left\{ m\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \right\} = 0,$$

$$\sum\left\{y\left[m\left(Z-\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\right]-z\left[m\left(Y-\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\right]\right\}=0,$$

$$\sum\left\{z\left[m\left(X-\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\right]-x\left[m\left(Z-\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\right]\right\}=0,$$

$$\sum\left\{x\left[m\left(Y-\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\right]-y\left[m\left(X-\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\right]\right\}=0$$

und können, aus naheliegenden Gründen, auch in den Formen

$$1)\qquad \sum\left(m\frac{d^2 x}{dt^2}\right)=\Sigma(mX),$$

$$2)\qquad \sum\left(m\frac{d^2 y}{dt^2}\right)=\Sigma(mY),$$

$$3)\qquad \sum\left(m\frac{d^2 z}{dt^2}\right)=\Sigma(mZ),$$

$$4)\qquad \sum\left\{m\left(y\frac{d^2 z}{dt^2}-z\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\right\}=\Sigma\{m(yZ-zY)\},$$

$$5)\qquad \sum\left\{m\left(z\frac{d^2 x}{dt^2}-x\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\right\}=\Sigma\{m(zX-xZ)\},$$

$$6)\qquad \sum\left\{m\left(x\frac{d^2 y}{dt^2}-y\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\right\}=\Sigma\{m(xY-yX)\}$$

geschrieben werden.

II. Sie drücken aus, dass die verlorenen Kräfte weder eine Verschiebung längs einer der Coordinatenachsen erzeugen, noch eine Drehung um eine derselben.

Aufgabe 235. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Bewegungsgleichungen Nr. 1) bis 3) eines Massensystemes (siehe vorige Lösung) und denjenigen seines Schwerpunktes?

Lösung. Von den für die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ geltenden Werthen ausgehend kommt man leicht auf

$$M\frac{d^2 \xi}{dt^2}=\Sigma(mX),$$

$$M\frac{d^2 \eta}{dt^2}=\Sigma(mY),$$

$$M\frac{d^2 \zeta}{dt^2}=\Sigma(mZ),$$

wobei M die Gesammtmasse bedeutet. Diess enthält den Satz: Der Schwerpunkt eines jeden freien Massensystemes bewegt sich so, als ob

alle Massen in ihm zu einem materiellen Punkte vereinigt wären und alle Kräfte parallel zu ihren eigentlichen Richtungen auf ihn wirkten. (Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.)

Aufgabe 236. Zwei in Bewegung befindliche Planeten, welche die Massen m_1 und m_2 haben, unterliegen nur ihrer gegenseitigen Anziehung, die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt. Für die Zeit Null ist der Ort des Schwerpunktes beider Körper bekannt; desgleichen seine Geschwindigkeit in Bezug auf Grösse und Richtung.

Man soll mit Benutzung der Lösung der vorigen Aufgabe berechnen

I. wo sich dieser Massenmittelpunkt zur Zeit t befindet;

II. in was für einer Bahn er sich bewegt und

III. mit welcher Geschwindigkeit.

Lösung. I. Die unter Nr. 235 angegebenen Gleichungen führen zunächst auf

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B_1,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = C_1,$$

lehren also, dass der Schwerpunkt im Sinne der Coordinatenachsen immer die constanten Geschwindigkeiten A_1, B_1 und C_1 hat, nämlich diejenigen, welche er anfänglich besass. Seine Lage ist daher bestimmt durch

$$\xi = A_1 t + A_2,$$
$$\eta = B_1 t + B_2,$$
$$\zeta = C_1 t + C_2,$$

in welchen Ausdrücken A_2, B_2 und C_2 die Anfangscoordinaten bedeuten.

II. Die Bahn ist eine gerade Linie; ihre xy-Projection bildet mit der x-Achse den Winkel $arctan \frac{B_1}{A_1}$ und schneidet auf der y-Achse die Strecke $\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1}$ ab; ebenso schliesst die xz-Projection mit der erstgenannten Achse den Winkel $arctan \frac{C_1}{A_1}$ ein und trifft die zweitgenannte im Abstande $\frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1}$ vom Coordinatenanfange.

III. In dieser geradlinigen Bahn läuft der Schwerpunkt mit der unveränderlichen Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.$$

Aufgabe 237. Wie Nr. 236; doch sind nicht zwei, sondern n Planeten vorhanden, und es ist die Anziehung irgend eine Function der gegenseitigen Entfernung.

Lösung. Da auch hier (wie bei der vorigen Aufgabe) die $\Sigma(mX)$, $\Sigma(mY)$ und $\Sigma(mZ)$ gleich Null sind, wie sich leicht beweisen lässt, so ergeben sich ganz dieselben Resultate.

Aufgabe 238. Auf ein räumliches rechtwinkliges Coordinatensystem sind zwei Körper bezogen (Punkte, denen die Massen m_1 und m_2 zukommen). Sie ziehen sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetze an und unterliegen ausserdem der Wirkung einer Kraft, welche im Sinne der negativen z thätig ist und die Masseneinheit constant mit der Intensität K beeinflusst. Die Coordinaten der Orte beider Körper sind für die Zeit Null bekannt; ferner kennt man die Achsengeschwindigkeiten des Schwerpunktes des Massensystems für diese Zeit.

Unter Anwendung der Lösung der Aufgabe 235 soll ermittelt werden, wo sich der Schwerpunkt zur Zeit t befindet, mit welcher Geschwindigkeit und in was für einer Bahn er sich bewegt.

Lösung. Im Sinne der x und y rückt der Massenmittelpunkt gleichförmig vor, nämlich mit den Geschwindigkeiten

$$v_\xi = A_1,$$

und

$$v_\eta = B_1,$$

die er ursprünglich hatte; in der Richtung der positiven z hingegen mit

$$v_\zeta = -Kt + C_1.$$

Hierdurch ist auch die Bahngeschwindigkeit v bestimmt, weil $v = \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2}$ sein muss.

Die Coordinaten des Ortes sind zur Zeit t

$$\xi = A_1 t + A_2,$$
$$\eta = B_1 t + B_2,$$
$$\zeta = -\tfrac{1}{2} K t^2 + C_1 t + C_2;$$

dabei lassen sich die Anfangswerthe A_2, B_2 und C_2 sogleich aus denen herleiten, welche man für die ursprünglichen Lagen der Massen m_1 und m_2 der Aufgabe nach kennt.

Die xy-Projection der Bahn ist eine Gerade, deren Gleichung sich ergiebt, wenn aus den vorstehenden Werthen von ξ und η die Zeit t eliminirt wird. Die beiden anderen Projectionen sind Parabeln; ihre Gleichungen erhält man auf die analoge Weise, nämlich dadurch, dass man t aus denjenigen Ausdrücken wegschafft, welche für ξ und ζ, bezüglich η und ζ, gefunden worden sind.

Aufgabe 239. Drei unter einander durch gewichtlose, starre gerade Linien verbundene Massen m_1, m_2, m_3 befinden sich zur Zeit Null an denjenigen Stellen des Raumes in Ruhe, deren rechtwinklige Coordinaten a_1, b_1, c_1, bezüglich a_2, b_2, c_2 und a_3, b_3, c_3 sind. Auf jede der Massen wirkt ihre Schwere im Sinne der negativen z; ausserdem, in der Richtung der positiven x, eine beschleunigende Kraft, welche der Zeit t proportional ist und für die Einheit der letzteren die Intensität k hat.

Verlangt wird das in der vorhergehenden Aufgabe Genannte.

Lösung. Im Sinne der positiven x bewegt sich der Schwerpunkt des Systemes mit einer Geschwindigkeit, welche dem Quadrate der verflossenen Zeit proportional ist und für $t = 1$ den Werth $\frac{1}{2}k$ besitzt; in dem der y findet gar keine Bewegung statt (was auch ohne Rechnung klar ist); in dem der negativen z nimmt die Geschwindigkeit in demselben Verhältnisse zu, wie die Zeit und ist für die Einheit der letzteren gleich g. (Freier Fall.)

Als Bahngeschwindigkeit hat man hiernach

$$v = \tfrac{1}{2} t \sqrt{4g^2 + k^2 t^2}.$$

Die Coordinaten des Ortes sind zur Zeit t:

$$\xi = \alpha + \tfrac{1}{6} k t^3,$$
$$\eta = \beta,$$
$$\zeta = \gamma - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

wobei

$$\alpha = \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$\beta = \frac{b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$\gamma = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Was die Bahn anlangt, so erkennt man zunächst, dass sie in einer Ebene liegen muss, die (im Abstande β) parallel ist zu der der xz; ihre Gleichung, oder die ihrer Verticalprojection, lautet

$$\zeta = \gamma - \tfrac{1}{2} g \left[\frac{6}{k}(\xi - \alpha)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Aufgabe 240. Es soll mit Benutzung der in der Aufgabe 234 angegebenen allgemeinen Gleichungen bewiesen werden, dass jedes sich bewegende freie Punktesystem, in welchem auf jeden Punkt stetige beschleunigende Kräfte X_1, Y_1, Z_1 etc. wirken, sich um seinen Schwerpunkt gerade so dreht, als ob er fest wäre.

Lösung. Die sich auf Drehung beziehenden allgemeinen Bewegungsgleichungen sind die unter 4), 5) und 6) bei Nr. 234 angeführten.

Es seien zur Zeit Null x, y und z die Coordinaten eines allgemeinen mit der Masse m versehenen Punktes der Verbindung in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfang mit dem Schwerpunkte zusammenfallen möge. Nach Verlauf der Zeit t soll Letzterer an eine Stelle gekommen sein, deren Coordinaten ξ, η, ζ sind. Durch diese neue Lage des Schwerpunktes werde ein zweites Achsensystem gelegt, gleichgerichtet zum ersten. Bezüglich dieses neuen Systemes mögen die Coordinaten von m mit x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden. Die auf die Drehung um die x-Achse sich beziehende Gleichung 4) der Nr. 234 lautet dann

$$\sum \left\{ m \left[(\eta + y_1) \frac{d^2\zeta + d^2 z_1}{dt^2} - (\zeta + z_1) \frac{d^2\eta + d^2 y_1}{dt^2} \right] \right\}$$
$$= \Sigma \{ m [(\eta + y_1) Z - (\zeta + z_1) Y] \}.$$

Besser geordnet (um zu zeigen, dass die ξ, η und ζ verschwinden) giebt diess

$$\sum \left\{ m \left(\eta \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2\eta}{dt^2} \right) \right\} + \sum \left\{ m \left(\eta \frac{d^2 z_1}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) \right\}$$
$$+ \sum \left\{ m \left(y_1 \frac{d^2\zeta}{dt^2} - z_1 \frac{d^2\eta}{dt^2} \right) \right\} + \sum \left\{ m \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) \right\}$$
$$= \Sigma [m (\eta Z - \zeta Y)] + \Sigma [m (y_1 Z - z_1 Y)].$$

Für alle Punkte des Massensystems sind ξ, η und ζ dieselben; man kann also das erste Glied der linken Seite der Gleichung schreiben:

$$\eta \frac{d^2\zeta}{dt^2} \Sigma(m) - \zeta \frac{d^2\eta}{dt^2} \Sigma(m)$$

und das erste der rechten:

$$\eta\, \Sigma(mZ) - \zeta\, \Sigma(mY);$$

diese beiden Werthe sind einander gleich.

Das zweite Glied links kann in der Form

$$\eta \sum \left(m \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right) - \zeta \sum \left(m \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right)$$

gegeben werden; ebenso das dritte in der Gestalt

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} \sum (m y_1) - \frac{d^2 \eta}{dt^2} \sum (m z_1).$$

Da nun das Coordinatensystem den Schwerpunkt als Ursprung hat, so sind die Summen $\Sigma(m y_1)$ und $\Sigma(m z_1)$ gleich Null; mithin auch die anderen $\sum \left(m \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right)$ und $\sum \left(m \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right)$.

Die vorstehende Gleichung lautet daher

$$\sum \left\{ m \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) \right\} = \Sigma \{ m (y_1 Z - z_1 Y) \}.$$

Hiermit ist bewiesen, dass die Drehung um die x-Achse gerade so erfolgt, als ob der Schwerpunkt fest wäre.

Der Nachweis in Bezug auf die beiden anderen Achsen lässt sich eben so führen.

Aufgabe 241. Zwei Massen m_1 und m_2, welche sich zur Zeit Null an den durch die rechtwinkligen Coordinaten a_1 und b_1, bezüglich a_2 und b_2, bestimmten Stellen einer Verticalebene in Ruhe befunden haben und durch eine starre, gewichtlose Gerade von der Länge a verbunden sind, unterliegen nur der Einwirkung ihrer Schwere, die in der Richtung der negativen y erfolgt. Die Natur derjenigen Bewegung, welche dieses Massensystem annehmen muss, ist (als freier Fall) vollkommen bekannt; man soll die „allgemeinen Gleichungen der Bewegung" (Lösung der Aufg. 234, bezüglich 235) zur Anwendung bringen und nachsehen, ob und in welcher Weise die mittelst derselben sich ergebenden Eigenschaften der vorliegenden Bewegung mit ihrer voraus bekannten Art übereinstimmen.

Lösung. Nach Nr. 234 hat man als Differentialgleichungen der Bewegung

1) $m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0,$

2) $m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -g(m_1 + m_2),$

3) $m_1 \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + m_2 \left(x_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} - y_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) = -g(m_1 x_1 + m_2 x_2),$

in denen x_1 und y_1 die Coordinaten von m_1, hingegen x_2 und y_2 die von m_2 zur Zeit t sind.

Aus 1) folgt zunächst

$$m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2} = 0,$$

wobei v_{x_1} und v_{x_2} diejenigen Geschwindigkeiten bedeuten, welche die Massen m_1 und m_2 im Sinne der positiven x haben; nachher:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 a_1 + m_2 a_2.$$

Diess stimmt mit der Natur des freien Falles offenbar ganz überein.

Dieselbe Uebereinstimmung zeigen auch die Gleichungen

$$m_1 v_{y_1} + m_2 v_{y_2} = -g(m_1 + m_2)\, t$$

und

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = -\tfrac{1}{2} g (m_1 + m_2)\, t^2 + m_1 b_1 + m_2 b_2,$$

welche aus 2) folgen und in deren erster v_{y_1} und v_{y_2} die Geschwindigkeiten von m_1 und m_2 im Sinne der positiven y sind.

Endlich folgen aus 3) die Gleichungen

$$m_1 (x_1 v_{y_1} - y_1 v_{x_1}) + m_2 (x_2 v_{y_2} - y_2 v_{x_2}) = -g (m_1 a_1 + m_2 a_2)\, t$$

und

$$m_1 S_1 + m_2 S_2 = -\tfrac{1}{2} g (m_1 a_1 + m_2 a_2)\, t^2,$$

in deren letzter S_1 und S_2 die von den Leitstrahlen beschriebenen (und von der Anfangslage aus gerechneten) Flächen bedeuten. Auch diess widerstreitet nicht, wie sich leicht nachweisen lässt, der Natur des freien Falles.

Benutzt man statt der Gleichungen 1) und 2) die aus Nr. 235 folgenden und für die Bewegung des Schwerpunktes geltenden

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$$

und

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -g (m_1 + m_2),$$

so liefern diese:

$$v_\xi = 0, \quad v_\eta = -gt, \quad \xi = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} \text{ und } \eta = \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m_1 + m_2} - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

was sich ebenfalls mit der ohne Rechnung bekannten Art der Bewegung in Uebereinstimmung befindet.

Aufgabe 242. Wie Nr. 241, doch mit folgenden Aenderungen: Auf m_1 wirkt im Sinne der positiven x eine beschleunigende Kraft,

welche der Zeit t proportional ist und in dem Augenblicke $t = 1$ die Intensität A_1 hat; im Sinne der positiven y eine solche, welche sich proportional dem Quadrate von t ändert und zur Zeit 1 den Werth B_1 besitzt. Auf m_2 sind zwei beschleunigende Kräfte ganz in derselben Weise thätig, nur mit dem Unterschiede, dass sie zur Zeit 1 die Intensitäten A_2, bezüglich B_2, haben. Die Schwere wirkt nicht.

Es sollen die unter Nr. 234 und 235 angegebenen allgemeinen Gleichungen benutzt werden, um Eigenschaften derjenigen Bewegungsart zu ermitteln, welche das Massensystem annimmt.

Lösung. Die unter Nr. 235 angeführten Gleichungen liefern sofort für die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes im Sinne der Achsen:

$$v_\xi = \tfrac{1}{2} k_1 t^2,$$
$$v_\eta = \tfrac{1}{3} k_2 t^3,$$

wobei $k_1 = \dfrac{A_1 m_1 + A_2 m_2}{m_1 + m_2}$ ist und $k_2 = \dfrac{B_1 m_1 + B_2 m_2}{m_1 + m_2}$; sodann, mit Benutzung der Abkürzungen $\dfrac{a_1 m_1 + a_2 m_2}{m_1 + m_2} = \alpha$ und $\dfrac{b_1 m_1 + b_2 m_2}{m_1 + m_2} = \beta$, für seine Coordinaten

$$\xi = \tfrac{1}{6} k_1 t^3 + \alpha,$$
$$\eta = \tfrac{1}{12} k_2 t^4 + \beta;$$

die Bahn hat daher die Gleichung

$$\eta = \tfrac{1}{12} k_2 \left[\frac{6}{k_1} (\xi - \alpha)\right]^{\frac{4}{3}} + \beta.$$

Mit derselben Leichtigkeit führt das bei Nr. 234 Angegebene (unter Beibehaltung der in der vorigen Lösung verwendeten Bezeichnungen) auf

$$m_1 v_{x_1} + m_2 v_{x_2} = \tfrac{1}{2} (A_1 m_1 + A_2 m_2) t^2,$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \tfrac{1}{6} (A_1 m_1 + A_2 m_2) t^3 + a_1 m_1 + a_2 m_2,$$
$$m_1 v_{y_1} + m_2 v_{y_2} = \tfrac{1}{3} (B_1 m_1 + B_2 m_2) t^3,$$
$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = \tfrac{1}{12} (B_1 m_1 + B_2 m_2) t^4 + b_1 m_1 + b_2 m_2.$$

Alle diese Gleichungen enthalten hübsche leicht in Worte zu fassende Bewegungsgesetze.

Aufgabe 243. Zwei Planeten (Punkte), deren Massen m_1 und m_2 sind, ziehen sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetze an und unterliegen ausserdem noch nach demselben Gesetze der Anziehung eines festen Centralkörpers (Punktes), dessen Masse m ist. Der Letztere

wird als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystemes genommen, bezogen auf welches die beiden Planeten zur Zeit t durch x_1, y_1, z_1, bezüglich x_2, y_2, z_2, ihrer Lage nach bestimmt werden. Die gegenseitige Entfernung derselben heisse allgemein u; der Abstand des ersten Planeten vom Centralkörper werde r_1, der des zweiten r_2 genannt. Wenn sich nun die beiden Planeten bewegen, so beschreiben ihre Leitstrahlen r_1 und r_2 im Raume gewisse Flächen, deren Inhalte S_1 und S_2 heissen und von der Zeit $t = 0$ an gerechnet werden mögen. Wir projiciren diese Flächen auf die yz-, xz-, xy-Ebene und nennen die Inhalte der Projectionen U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2.

Es sollen nun die Gleichungen 4) bis 6) der Lösung der Aufgabe 234 auf die Bewegung des vorliegenden Massensystemes angewendet und soll eine Eigenschaft dieser Bewegung ermittelt werden, indem man die U, V und W bei der zweiten Integration der genannten Gleichungen mit in die Rechnung hineinnimmt und ausrechnet, nach welchem Gesetze diese Flächenprojectionen beschrieben werden.

Lösung. Die X, Y und Z sind leicht zu ermitteln; mit ihnen hat man dann auch die auf den rechten Seiten der erwähnten drei Gleichungen vorkommenden Summen, findet nämlich, dass sie verschwinden; hierdurch gelangt man zu drei Differentialgleichungen, die sich, wenn die U, V und W eingeführt werden und die Beziehungen

$$dU_1 = \tfrac{1}{2}(y_1 dz_1 - z_1 dy_1)$$

etc. gehörige Beachtung finden, ohne Schwierigkeiten integriren lassen. Sie liefern die interessanten und leicht in Worte zu fassenden Gesetze:

$$\begin{aligned} m_1 U_1 + m_2 U_2 &= At, \\ m_1 V_1 + m_2 V_2 &= Bt, \\ m_1 W_1 + m_2 W_2 &= Ct, \end{aligned}$$

in denen A, B und C constante Grössen sind.

Aufgabe 244. Wie 243, doch mit folgenden Unterschieden:

Es liegen n Planeten vor, die mit den Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ versehen sind; der Centralkörper fehlt; die gegenseitige Anziehung ist ganz allgemein irgend eine Function der Entfernung.

Lösung. Zieht man zunächst nur zwei der Planeten in Betracht, erweitert dann aber das Gefundene auf alle n, so gelangt man wieder leicht zu den für die rechten Seiten der Gleichungen 4) bis 6) von Nr. 234 nöthigen Summen; dieselben sind auch hier gleich Null. Das bei der vorigen Lösung Angedeutete benutzend findet man schliesslich (unter

Beibehaltung der in Nr. 243 eingeführten Bezeichnungen) die wichtigen Sätze

$$\Sigma(m U) = A t,$$
$$\Sigma(m V) = B t,$$
$$\Sigma(m W) = C t,$$

welche das „Princip der Erhaltung der Flächen" ausdrücken.

Aufgabe 245. Es soll untersucht werden, ob der zu Ende der vorigen Lösung gefundene Satz auch dann noch gilt, wenn die Planeten ausser ihrer gegenseitigen Anziehung noch einer anderen unterliegen, welche von einem im Coordinatenanfange stehenden Centralkörper (Punkt) herrührt und ebenfalls irgend eine Function der Entfernung ist.

Lösung. Der Einfluss des Centralkörpers ändert, wie sich leicht nachweisen lässt, nichts an dem Nullwerden der in der vorigen Lösung erwähnten Summen; das oben gefundene Gesetz besteht also auch hier.

Aufgabe 246. Gegeben ist ein System von Massen m_1, m_2, m_3, ... m_n; bekannt sind ferner die auf die Masseneinheiten in den Richtungen der positiven Coordinaten eines rechtwinkligen Systemes wirkenden Componenten X_1, Y_1, Z_1, bezüglich X_2, Y_2, Z_2 u. s. w. sämmtlicher Kräfte; gefragt wird nach der Summe der mechanischen Arbeiten $[\frac{1}{2}\Sigma(m v^2)]$ und nach denjenigen nächsten Folgerungen, die sich an das gefundene Resultat in Bezug auf die lebendige Kraft des Massensystemes knüpfen.

Lösung. Man findet

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(m v^2) = \Sigma\left[m\int(X dx + Y dy + Z dz)\right] + Const,$$

wobei die Integration sich auf die Zeit bezieht, so dass auch geschrieben werden kann

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(m v^2) - \tfrac{1}{2}\Sigma(m v_0^2) = \Sigma\left[m\int_{t=t_0}^{t=t}(X dx + Y dy + Z dz)\right].$$

Ist $X dx + Y dy + Z dz$ das vollständige Differential einer Function F der Coordinaten, so lässt sich die Integration ausführen; man kann dann also die Zunahme der lebendigen Kraft bestimmen, wenn für den Anfang und das Ende des in Betracht kommenden Zeitraumes der Ort aller Punkte bekannt ist. So oft das System durch die nämliche Lage geht, wird die Summe der lebendigen Kräfte wieder dieselbe.

Wenn $X dx + Y dy + Z dz$ gleich Null ist, so hat $\Sigma(m v^2)$ unveränderliche Grösse. (Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.)

Aufgabe 247. Eine Kugel (Punkt) wird proportional ihrer Masse m und der n^{ten} Potenz der Entfernung senkrecht gegen eine Ebene angezogen. Im Abstande h von der Letzteren hat sie in beliebiger Richtung die Geschwindigkeit c, und in der Entfernung 1 ist die Beschleunigung der Anziehung gleich k. Widerstände finden nicht statt.

Durch Anwendung des bei der vorhergehenden Lösung erhaltenen Satzes von der lebendigen Kraft soll man diejenige Geschwindigkeit v bestimmen, welche die Kugel dann besitzt, wenn der Abstand h sich bis auf z vermindert hat.

Man soll ferner das gefundene Resultat auf den Fall anwenden, dass die vorliegende Anziehung die constante Schwere der Kugel ist, und auf den anderen, dass diese Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt.

Lösung. Für $n = -1$ ist

$$v = \sqrt{c^2 + 2kl\frac{h}{z}};$$

für $n \gtrless -1$ hingegen

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{2k}{n+1}(h^{n+1} - z^{n+1})}.$$

Wenn nur die unveränderliche Schwere wirkt, so wird hieraus das sehr bekannte

$$v = \sqrt{c^2 + 2g(h-z)};$$

liegt das Newton'sche Anziehungsgesetz vor, so ist

$$v = \sqrt{c^2 + 2k\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{h}\right)}.$$

Aufgabe 248. Wie Nr. 79; doch soll nur die Bahngeschwindigkeit v des sich bewegenden Punktes berechnet werden und zwar durch Benutzung des unter Aufgabe 246 gefundenen Satzes von der lebendigen Kraft.

Lösung. Die beschleunigenden Kräfte sind nach der zu Nr. 79 gegebenen Lösung bekannt; führt man ihre Werthe ein in die unter 246 dagewesene Gleichung, so folgt sogleich

$$v = \pm k\sqrt{2by + 3(b^2 - x^2 - y^2)}.$$

Aufgabe 249. Für den unter Nr. 98 näher bezeichneten beweglichen Punkt soll die Geschwindigkeit v wiederum durch Anwendung

des Satzes von der Summe der mechanischen Arbeiten (246) abgeleitet werden.

Lösung. Es ergiebt sich alsbald das unter Nr. 98 angeführte Resultat. *

Aufgabe 250. Jede der zwei Massen m_1 und m_2, die ein unveränderliches System bilden, wird von einer Ebene derartig abgestossen, dass diese Abstossung dem Quadrate der Entfernung von der Ebene umgekehrt proportional ist und für die Einheit dieses Abstandes die Beschleunigung k ertheilt. Anfänglich befinden sich die beiden Massen in den Entfernungen a_1 und a_2 (von der Ebene) in Ruhe.

Welche lebendige Kraft besitzt das System, wenn die Massen um z_1, bezüglich z_2, von der Ebene abstehen?

Wie gross ist diese lebendige Kraft dann, wenn nicht zwei Massen, sondern deren n vorliegen, die sich anfänglich in den Abständen a_1, a_2, a_3, ... a_n in Ruhe befunden haben?

Lösung. Das in der Lösung zu Nr. 246 Angegebene führt auf

$$\Sigma(mv^2) = 2k \left\{ m_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{z_1}\right) + m_2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{z_2}\right) \right\}$$

als Grösse der gesuchten lebendigen Kraft. In der Form

$$\Sigma(mv^2) = 2k \sum \left\{ m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right) \right\}$$

geschrieben, gilt der Ausdruck zugleich für n Massen, nur dass sich dann das Summenzeichen nicht blos auf zwei, sondern auf n Glie der erstreckt.

Aufgabe 251. Drei auf einander senkrechte Ebenen stossen jede der Massen m_1, m_2, m_3, welche unter einander fest verbunden sind, derartig ab, dass diese Abstossung immer der Entfernung von der betreffenden Ebene proportional ist und für die Einheit dieser Entfernung die Beschleunigung A^2 ertheilt. Anfänglich befinden sich die drei Massen in bekannten Abständen von den drei Ebenen in Ruhe.

---

* Man übersieht leicht, in welcher Weise der in den vorhergehenden Capiteln enthaltene Stoff sich benutzen lässt, um (wie diess bei Nr. 247, 248 und 249 geschehen ist) Aufgaben zu bilden, die mittelst der in diesem sechsten Capitel dagewesenen allgemeinen Sätze gelöst werden können; auch wird man bemerken, dass diese allgemeinen Sätze bei vielen Lösungen in den vorhergehenden Capiteln (wenn auch versteckt) benutzt worden sind.

Es soll berechnet werden, welche lebendige Kraft das System in jeder beliebigen Stellung besitzt und zwar sowohl wenn nur drei, als auch wenn allgemein n Massen vorliegen.

Lösung. Bezeichnet man die Abstände der drei Massen m_1, m_2, m_3 von dem gemeinschaftlichen Punkte der abstossenden Ebenen mit r_1, r_2, r_3 und die anfänglichen Werthe dieser Entfernungen mit p_1, p_2, p_3, so ist (nach Nr. 246)

$$\Sigma (m v^2) = A^2 \{m_1 (r_1^2 - p_1^2) + m_2 (r_2^2 - p_2^2) + m_3 (r_3^2 - p_3^2)\}$$

oder

$$\Sigma (m v^2) = A^2 \, \Sigma \{m (r^2 - p^2)\},$$

wobei letzteres sowohl für drei, als auch allgemein für n Massen Giltigkeit hat.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

ER
RG









